

Opción A**Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1**

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0$, $x \neq 1$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).

- a) [1'25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
 b) [1'25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0$, $x \neq 1$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).

- a)
 Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables en un entorno de "a", $f(a) = g(a) = 0$ y existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale $0/0$, ∞/∞ , y si el límite tiende a ∞]

Asíntotas verticales (A.V.)

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \cdot \frac{1}{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$, la función f **no tiene A.V. en $x = 0$** .

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, la función f **tiene A.V. en $x = 1$** .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

Asíntotas horizontales (A.H.)

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}, L'H \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, la función f **no tiene A.H. en $+\infty$**

Asíntotas oblicuas (A.O.)

La función f tiene una A.O. $y = mx + n$, si $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$, la función f **no tiene A.O. en $+\infty$**

Como $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, f tiene una rama parabólica.

b)

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Recta tangente en $x = e$ es $y - f(e) = f'(e)(x - e)$

Recta normal en $x = e$ es $y - f(e) = (-1/f'(e)) \cdot (x - e)$

$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$, luego $f(e) = e/1 = e$.

$f'(x) = \frac{\ln(x) - x \cdot (1/x)}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$, luego $f'(e) = (1 - 1)/e^2 = 0$.

La recta tangente pedida es $y - (e) = 0 \cdot (x - e)$, de donde $y = e$.

La recta normal pedida es $y - (e) = (-1/0) \cdot (x - e)$, de donde $x = e$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

[2'5 puntos] Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$.

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución

Una primitiva de g es $G(x) = \int g(x) \cdot dx$

$G(x) = \int g(x) \cdot dx = \int \frac{x}{1 + \sqrt{x}} dx$. Nos dan el cambio $t = \sqrt{x}$, es decir $t^2 = x$, luego $2t \cdot dt = dx$, y sustituyendo nos queda $G(x) = \int \frac{t^2}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t^3}{1+t} dt$, que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

el denominador si hiciese falta.

$$\begin{array}{r} 2t^3 \\ -2t^3 - 2t^2 \\ \hline -2t^2 \\ 2t^2 + 2t \\ \hline 2t \\ -2t - 2 \\ \hline -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} t+1 \\ \hline 2t^2 - 2t + 2 \end{array} \right.$$

Recordamos que $G(x) = \int ((C(t)) + R(t)/(div(t))) dt = \int (2t^2 - 2t + 2) dt + \int \frac{-2t}{1+t} dt =$

$$= 2t^3/3 - t^2 + 2t - 2 \cdot \ln|t + 1| + K = \{ \text{quito el cambio } t = \sqrt{x} \} = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 2 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| + K.$$

Como $G(x)$ pasa por el punto $(1,0)$, tenemos $G(1) = 0$, es decir $2(1)/3 - 1 + 2(1) - 2 \cdot \ln|(1) + 1| + K = 0$, de donde obtenemos $K = 2 \ln(2) - 5/3$, y nuestra primitiva es $G(x) = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 2 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| + 2 \ln(2) - 5/3$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- a) [1'25 puntos] Determina el rango de A según los valores del parámetro m.
- b) [0'75 puntos] Discute el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro m.
- c) [0'5 puntos] Resuelve el sistema $AX = B$ para $m = 1$.

Solución

Sean $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- a) Determina el rango de A según los valores del parámetro m.

La matriz A es de orden 3×3 , y sabemos que los vectores fila son linealmente independientes si sólo si (sii) el determinante (\det ó $| \quad |$) de la matriz M es distinto de cero, en cuyo caso el rango sería 3.

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la primera fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ajuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = m \cdot (m-2+3m) - 0 + (2)(-2m+1) = 4m^2 - 2m - 4m + 2 = 4m^2 - 6m + 2.$$

Igualando a cero tenemos $0 = 4m^2 - 6m + 2 = 2m^2 - 3m + 1$, de donde $m = 1$ y $m = 1/2$.

Por tanto si $m \neq 1$ y $m \neq 1/2$, $|A| \neq 0$ y $\text{rango}(A) = 3$.

Si $m = 1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**.

Si $m = 1/2$ tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1/4 = -1/4 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**.

b)

Discute el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro m .

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & m & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, le

hemos añadido a la matriz A la matriz columna B.

Hemos visto en el apartado anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & m & m-2 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ajuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = m \cdot (m-2+3m) - 0 + (2)(-2m+1) = 4m^2 - 2m - 4m + 2 = 4m^2 - 6m + 2.$$

Igualando a cero tenemos $0 = 4m^2 - 6m + 2 = 2m^2 - 3m + 1$, de donde $m = 1$ y $m = 1/2$.

Por tanto si $m \neq 1$ y $m \neq 1/2$, $|A| \neq 0$ y $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*)$, por tanto el sistema tiene solución única.

Si $m = 1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**.

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$. Como **rango(A) =**

= rango(A^*) = 2 < n° de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si $m = 1/2$ tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1/2 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1/4 = -1/4 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**.

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ajuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = (1/2)(1-1/2) = 1/4 \neq 0$, tenemos **rango(A^*) = 3**. Como **rango(A) = 2 \neq**

\neq rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene solución.

c)

Resuelve el sistema $AX = B$ para $m = 1$.

Por el apartado anterior hemos visto que si $m = 1$, **rango(A) = rango(A^*) = 2 < n° de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Tomamos sólo dos ecuaciones, las dos últimas, que son con las que hemos formado el menor de A distinto de cero (nos fijamos en las dos últimas filas de la matriz ampliada A^*).

$$-x + y - z = 1$$

$$x + 2z = 0. \text{ Hacemos } z = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ con lo cual } x = -2\lambda \text{ e } y = 1 - 2\lambda + \lambda = 1 - \lambda.$$

Solución del sistema $(x,y,z) = (-2\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.

- a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r .
- b) [0'75 puntos] Calcula la distancia de A a r .

Solución

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.

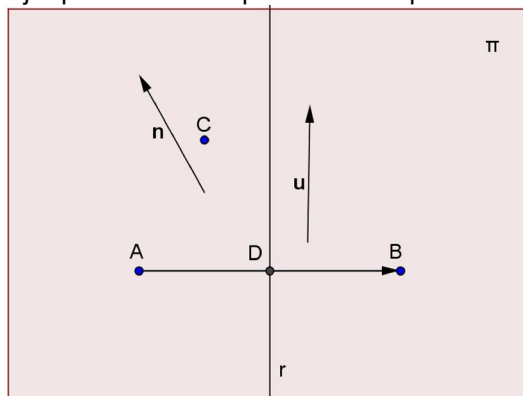
a)

Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r .

b)

Calcula la distancia de A a r .

Vamos a realizar un pequeño dibujo que nos servirá para los dos apartados.



Al ser A y B son simétricos respecto de r , su punto medio D pertenece a la recta " r ", $D(0, 1, 3/2)$.

Al ser A y B son simétricos respecto de r , el vector director u de " r " es perpendicular (\perp) al vector AB , por tanto $u \bullet AB = 0$ (\bullet es el producto escalar).

Como la recta " r " está contenida en el plano " π ", el vector director u de " r " es perpendicular (\perp) al vector normal n del plano " π ", por tanto $u \bullet n = 0$.

Al ser A y B son simétricos respecto de r , la distancia del punto A a la recta " r ", es la mitad de la longitud del segmento AB.

" π " es el plano determinado por los puntos A, B y C. Un vector normal es el producto vectorial (\times) de los vectores $AB = (-2, -2, 1)$ y $AC = (2, 0, -1)$.

$$n_1 = AB \times AC = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2) - \vec{j}(0) + \vec{k}(4) = (2, 0, 4). \text{ Otro vector normal "}\pi\text{" de es } n = (1, 0, 2).$$

La recta " r " está determinada por el punto $D(0, 1, 3/2)$ y el vector director $u = (a, b, c)$.

Como $u \bullet AB = 0$, tenemos $(a, b, c) \bullet (-2, -2, 1) = 0 = -2a - 2b + c = 0$

Como $u \bullet n = 0$, tenemos $(a, b, c) \bullet (1, 0, 2) = 0 = a + 0 + 2c = 0$, de donde $a = -2c$. Entrando con este valor en la ecuación $-2a - 2b + c = 0$, tenemos $-2(-2c) - 2b + c = 0$, de donde $b = 5c/2$.

El vector director u de la recta " r " es $u = (a, b, c) = (-2c, 5c/2, c)$. Como hay infinitos vectores, tomo uno de ellos tomando $c = 2$, luego $u = (-4, 5, 2)$.

La recta " r " pedida, tiene de ecuación continua: $r \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3/2}{2}$.

Ya he dicho que la distancia del punto A a la recta " r " es la mitad del segmento AB, luego:

$$d(A; r) = (||AB||)/2 = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2} u^2.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq 1/2$.

- a) [1 punto] Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0, 2)$ y que la recta $x = 2$ es una asíntota de dicha gráfica.
- b) [1'5 puntos] Para $k = 4$ y $a = 2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq 1/2$.

a)

Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x = 2$ es una asíntota de dicha gráfica.

Como f pasa por $(0,2) \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow \frac{k}{(-a)(-1)} = 2 \rightarrow k = 2a$. Tenemos $f(x) = \frac{2a}{(x-a)(2x-1)}$

“La recta $x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$ ”

Las A.V. en cocientes de funciones polinómicas suelen ser los números que anulan el denominador, en este caso $x = a$ y $x = 1/2$, por tanto $a = 2$, puesto que $x = 2$ es una A.V. Veamos que el límite es infinito:

Nuestra función sería $f(x) = \frac{2(2)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{(x-2)(2x-1)}$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{(0^+)(4-1)} = \frac{4}{0^+} = +\infty$, la recta $x = 2$ es una A.V. de f

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{(0^-)(4-1)} = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Por tanto $a = 2$ y $k = 4$.

b)

Para $k = 4$ y $a = 2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de $f'(x)$, siendo $f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)}$ para $x \neq 2$ y $x \neq 1/2$.

$$f(x) = \frac{4}{(x-2)(2x-1)} = \frac{4}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 4(4x-5)}{(2x^2 - 5x + 2)^2} = \frac{-16x + 20}{(2x^2 - 5x + 2)^2}$$

Si $f'(x) = 0$; tenemos $-16x + 20 = 0$, de donde $x = 20/16 = 5/4 = 1'25$, que puede ser el extremo relativo.

Como $f'(0) = \frac{20}{(+)} > 0$, $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1'25) - \{1/2\}$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en

$(-\infty, 1'25) - \{1/2\}$.

Como $f'(3) = \frac{-28}{(+)} < 0$, $f'(x) < 0$ en $(1'25, +\infty) - \{2\}$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en

$(1'25, +\infty) - \{2\}$.

Por definición $x = 5/4 = 1'25$ es un máximo relativo de f que vale $f(5/4) = \frac{4}{(5/4 - 2)(2(5/4) - 1)} = -39/2 \cong -3'56$

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(2x) dx$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida $I = \int x \cdot \sin(2x) \cdot dx$, que es una integral por partes.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$I = \int x \cdot \sin(2x) \cdot dx = \{ u = x \rightarrow du = dx; dv = \sin(2x) \cdot dx \rightarrow v = \int \sin(2x) \cdot dx = (-\cos(2x))/2 \} = x \cdot (-\cos(2x))/2 - \int (-\cos(2x))/2 \cdot dx = -(1/2) \cdot x \cdot \cos(2x) + (1/2) \int \cos(2x) \cdot dx = -(1/2) \cdot x \cdot \cos(2x) + (1/4) \cdot \sin(2x) + K.$$

$$\text{Luego la integral pedida es } \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin(2x) \cdot dx = [-(1/2) \cdot x \cdot \cos(2x) + (1/4) \cdot \sin(2x) + K]_0^{\pi/2} = (-(1/2) \cdot (\pi/2) \cdot \cos(\pi) + (1/4) \cdot \sin(\pi) + K) - (-(1/2) \cdot (0) \cdot \cos(0) + (1/4) \cdot \sin(0) + K) = -(1/2) \cdot (\pi/2) \cdot (-1) = \pi/4.$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

a) [1'25 puntos] Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

b) [1'25 puntos] Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

Solución

Sean A y B las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

a)

Calcula las matrices X e Y para las que $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

$$2X - Y = A \quad (F_1 - 2F_2) \rightarrow 5Y = A - 2B \rightarrow Y = (1/5) \cdot (A - 2B)$$

$$X - 3Y = B \rightarrow X - 3Y = B \rightarrow X = 3 \cdot ((1/5) \cdot (A - 2B)) + B = (3/5) \cdot (A - 2B) + B = (3/5)A - (6/5)B + B = (3/5)A - (1/5)B = (1/5) \cdot (3A - B).$$

Las matrices pedidas son:

$$X = (1/5) \cdot (3A - B) = (1/5) \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Y = (1/5) \cdot (A - 2B) = (1/5) \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} \right) = (1/5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

Halla la matriz Z que verifica $B^2 + ZA + B^t = 3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa A^{-1} , porque $\det(A) = |A| = 10 - 9 = 1 \neq 0$.

Sabemos que $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{luego } A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

De la expresión $B^2 + ZA + B^t = 3I$, tenemos $ZA = 3I - B^2 - B^t$. Multiplicando los dos miembros de la igualdad $ZA = 3I - B^2 - B^t$ por la inversa A^{-1} por la derecha tenemos:

$$ZAA^{-1} = (3I - B^2 - B^t)A^{-1}, \text{ de donde } Z = (3I - B^2 - B^t)A^{-1}.$$

$$Z = (3I - B^2 - B^t)A^{-1} = \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 37 & -24 \\ -54 & 61 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Septiembre 2013 específico 1

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Determina la posición relativa de r y s.

b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a)

Determina la posición relativa de r y s.

Ponemos la recta "s" en paramétricas tomando $y = \mu \in \mathbb{R}$, luego $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{cases}$

Un punto de "r" es $A(2,3,0)$, y un vector director es $\mathbf{u} = (-3,5,1)$.

Un punto de "s" es $B(1,0,5)$, y un vector director es $\mathbf{v} = (-1,1,0)$.

Observamos que los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} no son proporcionales, por tanto las rectas se cortan o se cruzan.

$$\mathbf{AB} = (-1, -3, 5)$$

Si $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, las rectas se cortan.

Si $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, las rectas se cruzan.

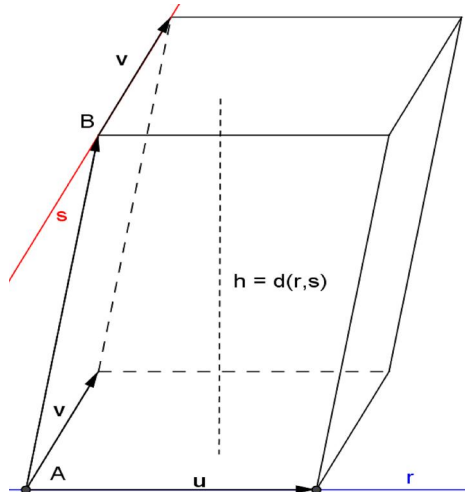
$$\text{Como } \det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = (-1)(-28) - (1)(14) = 14 \neq 0, \text{ luego las rectas se cruzan.}$$

Formamos el vector $\mathbf{AB} = (6, 0, 0)$. Vemos que $\mathbf{AB} \neq \lambda \mathbf{u}$, por tanto las rectas son paralelas y distintas.

b)

Calcula la distancia entre r y s .

Antes de resolver el problema, haremos un pequeño dibujo, y de cada recta tomaremos un punto y un vector director.



De la recta "r" tomamos el punto $A(2, 3, 0)$ y como vector director el $\mathbf{u} = (-3, 5, 1)$.

De la recta "s" tomamos el punto $B(1, 0, 5)$ y como vector director el $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$.

Para el punto A de "r" tomamos $y = 0$, de donde $x = 2$ y $z = 4$, luego $A(2, 0, 4)$

Sabemos que el volumen del paralelepípedo es el valor absoluto ($| \cdot |$) del producto mixto de tres vectores con origen común ($[\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$), pero también es el área de la base (área de un paralelogramo, que es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan $\|\mathbf{uxv}\|$) por la altura (h), que es la distancia entre las rectas, es decir:

Volumen del paralelepípedo = $[\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \text{área base} \cdot h = \|\mathbf{uxv}\| \cdot d(\text{OX}, r)$, de donde la distancia entre las rectas es " $d(\text{OX}, r) = |([\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]) / (\|\mathbf{uxv}\|)|$ "

$$\mathbf{AB} = (6, 0, 0); \quad \mathbf{u} = (-3, 5, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, 1, 0).$$

$$\text{Ya hemos calculado, en el apartado a), } [\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 14.$$

$$\mathbf{uxv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(2) = (-1, -1, 2), \text{ de donde } \|\mathbf{uxv}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{La distancia pedida es } d(\text{OX}, r) = |([\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]) / (\|\mathbf{uxv}\|)| = \frac{14}{\sqrt{6}} = \frac{14\sqrt{6}}{6} = \frac{7\sqrt{6}}{3} \cong 5,715 \text{ u.l.}$$