

## Opción A

### Ejercicio 1 opción A, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$  para  $x > 0$  ( $\ln$  denota el logaritmo neperiano).

(a) [1'75 puntos] Determina el punto de la gráfica de  $f$  en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$

#### Solución

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x)$  para  $x > 0$  ( $\ln$  denota el logaritmo neperiano).

(a)

Determina el punto de la gráfica de  $f$  en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Sabemos que la pendiente genérica de la recta tangente de la función  $f$  es  $f'(x)$ .

Como me dicen que dicha pendiente ( $f'(x)$ ) tiene que ser máxima, la derivada de la función  $f'(x)$  tiene que ser cero, es decir  $f''(x) = 0$ , y me dicen que  $x > 0$ , por tanto tomaremos sólo las soluciones positivas.

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x); \quad f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1x^{-2}}{2} + \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{2x^{-2-1}}{2} + \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{-1}{x^2}.$$

De  $f''(x) = 0$ , tenemos  $\frac{1}{x^3} + \frac{-1}{x^2} = 0$ , es decir  $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ , luego  $x^2 = x^3$ , con lo cual:

$x^2 - x^3 = 0 = x^2 \cdot (1 - x)$ . Soluciones  $x = 0$  (doble), que no está en el dominio y  $x = 1$ .

Veamos que efectivamente  $x = 1$  es un máximo de  $f''(x)$ , es decir  $f'''(1) < 0$ .

$$f''(x) = x^{-3} - 1 \cdot x^{-2}, \text{ de donde } f'''(x) = -3x^{-4} + 2 \cdot x^{-3} = \frac{-3}{x^4} + \frac{2}{x^3}, \text{ luego } f'''(1) = -3 + 2 = -1 < 0.$$

**El punto de la gráfica de  $f$  en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es  $(1, f(1)) = (1, 1/2)$ .**

(a)

Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$

Recta normal en  $x = 1$  es  $y - f(1) = (-1/f'(1)) \cdot (x - 1)$

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x); \text{ luego } f(1) = 1/2 + 0 = 1/2.$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x}, \text{ luego } f'(1) = -1/2 + 1 = 1/2.$$

La recta normal pedida es  $y - (1/2) = -1/(1/2) \cdot (x - 1)$ , de donde  $y - (1/2) = -2 \cdot (x - 1)$ , luego **la recta normal pedida es  $y = -2x + 5/2$ .**

### Ejercicio 2 opción A, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

[2'5 puntos] Calcula  $\int_{-1}^1 \ln(4-x) dx$  ( $\ln$  denota el logaritmo neperiano).

#### Solución

Calculamos primero la integral indefinida  $I = \int \ln(4-x) dx$ , que es una integral por partes

$$\left( \int u dv = uv - \int v du \right)$$

$$u = \ln(4-x), \text{ de donde } du = \frac{-1}{4-x} dx. \quad dv = dx, \text{ de donde } v = \int dx = x$$

$$I = \int \ln(4-x) dx = x \cdot \ln|4-x| - \int x \cdot \frac{(-dx)}{4-x} = x \cdot \ln|4-x| + \int \frac{xdx}{4-x} = x \cdot \ln|4-x| - I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{xdx}{4-x}, \text{ que es una integral racional.}$$

Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciere falta.

$$\begin{array}{r} x \\ -x+4 \\ \hline +4 \end{array} \quad \begin{array}{r} -x+4 \\ -1 \\ \hline \end{array}$$

Recordamos que  $I_1 = \int (C(x) + R(x)/(\text{div}(x))) dx = \int -1 dx + \int \frac{4}{4-x} dx = -x - 4 \cdot \ln|4-x|$ . Luego

$$I = x \cdot \ln|4-x| + I_1 = x \cdot \ln|4-x| + (-x - 4 \cdot \ln|4-x|) = x \cdot \ln|4-x| - x - 4 \cdot \ln|4-x|$$

**La integral pedida es**

$$\int_{-1}^1 \ln(4-x) dx = [x \cdot \ln|4-x| - x - 4 \cdot \ln|4-x|]_{-1}^1 =$$

$$= (1 \cdot \ln|4-1| - 1 - 4 \cdot \ln|4-1|) - [(-1) \cdot \ln|4-(-1)| - (-1) - 4 \cdot \ln|4-(-1)|] =$$

$$= \ln(3) - 1 - 4\ln(3) + \ln(5) - 1 + 4\ln(5) = \mathbf{-3\ln(3) + 5\ln(5) - 2 \cong 2'7514}.$$

### Ejercicio 3 opción A, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{array}{r} x + (m+1)y + 2z = -1 \\ mx + y + z = m \\ (1-m)x + 2y + z = -m-1 \end{array}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [0'75 puntos] Resuélvelo para  $m = 2$ . Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que  $z = 2$

#### Solución

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es  $A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}.$$

Si  $\det(A) = |A| \neq 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (1)(1-2) - (m+1)(m-1+m) + (2)(2m-1+m) = \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= -1 - (m+1)(2m-1) + (2)(3m-1) = -1 - (2m^2 + m - 1) + 6m - 2 = -2m^2 + 5m - 2.$$

Resolviendo la ecuación  $-2m^2 + 5m - 2 = 0$ , obtenemos  $m = 1/2$  y  $m = 2$ .

Si  $m \neq 1/2$  y  $m \neq 2$ ,  $\det(A) = |A| \neq 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si  $m = 1/2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2+1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1-1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

En A como  $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3/4 = 1/4 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2$ .

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{vmatrix}$  saco un 2 de cada fila  $= (2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$  Adjuntos primera = fila =

$= 8 \cdot ( (2)(-6-4) - (3)(-3-1) + (-1)(4-2) ) = 8(-10) = -80 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A^*) = 3$ . Como  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ , **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si  $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

En A como  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2$ .

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ , por que la fila  $2^a$  se obtiene de la  $1^a$  restándole la  $3^a$ , luego

tenemos  $\text{rango}(A^*) = 2$ . Como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$  número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

b)

Resuélvelo, si es posible, para  $m = 2$ . Para dicho valor de  $m$ , calcula, si es posible, una solución en la que  $z = 2$

Hemos visto en el apartado anterior que si  $m = 2$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ , **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la  $1^a$  y la  $2^a$ ).

$x + 3y + 2z = -1 \quad \rightarrow \quad x + 3y + 2z = -1$   
 $2x + y + z = 2. \quad F_2 - 2F_1 \quad \rightarrow \quad -5y - 3z = 4.$  Tomo  $z = a \in \mathbb{R}$ , de donde  $y = -3a/5 - 4/5$ , y entrando en la  $1^a$  ecuación tenemos  $x + 3(-3a/5 - 4/5) + 2(a) = -1$ , de donde  $x + a/5 - 12/5 = -1$ , luego  $x = -a/5 + 7/5$ .

**Solución  $(x,y,z) = (-a/5 + 7/5, -3a/5 - 4/5, a)$  con  $a \in \mathbb{R}$ .**

**Tomando  $z = a = 2$ , la solución pedida es  $(x,y,z) = (-2/5 + 7/5, -3(2)/5 - 4/5, 2) = (1,-2,2)$ .**

#### Ejercicio 4 opción A, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

Sean los vectores  $u = (1,-1,0)$ ,  $v = (0,1,2)$  y  $w = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$ . Halla los valores de  $\alpha$  en cada uno de los siguientes casos:

- [1 punto]  $u$ ,  $v$  y  $w$  están en el mismo plano.
- [0'5 puntos]  $w$  es perpendicular a  $u$  y  $v$ .
- [1 punto] El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  es  $1/6$ .

#### Solución

Sean los vectores  $u = (1,-1,0)$ ,  $v = (0,1,2)$  y  $w = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$ . Halla los valores de  $\alpha$  en cada uno de los siguientes casos:

- $u$ ,  $v$  y  $w$  están en el mismo plano.

Sabemos que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  están en el mismo plano, si los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son linealmente dependientes, es decir si y solo si  $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = 1(2-3\alpha-4\alpha) - (-1)\cdot(0-2-2\alpha) + 0 = 2-7\alpha-2-2\alpha = -9\alpha = 0, \\ \text{fila} \end{array}$$

con lo cual **si  $\alpha = 0$ , los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son linealmente dependientes, y por tanto están en el mismo plano.**

(b)

$\mathbf{w}$  es perpendicular a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

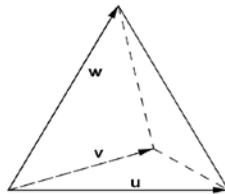
Si los vectores son perpendiculares, su producto escalar ( $\bullet$ ) es cero.

$\mathbf{w} \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha) \bullet (1, 0, 2) = 1 \cdot (1+\alpha) + 0 \cdot (2\alpha) + 2 \cdot (2-3\alpha) = 1+\alpha+4-6\alpha = 5 - 5\alpha = 0$ , **de donde  $\alpha = 1$ , para que  $\mathbf{w}$  sea perpendicular a  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .**

(c)

El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  es  $1/6$ .

Sabemos que el volumen del tetraedro es  $1/6$  del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ ; es decir  $1/6$  del valor absoluto del producto mixto  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ .



$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1+\alpha & 2\alpha & 2-3\alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = 1(2-3\alpha-4\alpha) - (-1)\cdot(0-2-2\alpha) + 0 = \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= 2-7\alpha-2-2\alpha = -9\alpha.$$

Como el volumen del tetraedro es  $1/6$  del volumen del paralelepípedo, tenemos:

$(1/6) \cdot |[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = 1/6$  (Volumen que me han dado), es decir  $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = 1 \rightarrow |-9\alpha| = 1$ , de donde tenemos dos ecuaciones:  $-(-9\alpha) = 1$  y  $+(-9\alpha) = 1$ , por tanto tenemos dos ecuaciones:  $\alpha = 1/9$  y  $-\alpha = -1/9$ .

**Por tanto el volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  es  $1/6$  si tomamos  $\alpha = 1/9$  y  $\alpha = -1/9$ .**

## Opción B

### Ejercicio 1 opción B, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

[2'5 puntos] Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ . Halla b, c y d sabiendo que  $f$  tiene un máximo relativo en  $x = -1$  y que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ .

#### Solución

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ . Halla b, c y d sabiendo que  $f$  tiene un máximo relativo en  $x = -1$  y que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ .

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ . Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en  $\mathbb{R}$ .

Como tiene un máximo relativo en  $x = -1$ , sabemos que  $f'(-1) = 0$ .

german.jss@gmail.com

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = 3x^2 + 2bx + c.$$

De  $f'(-1) = 0$ , tenemos  $3(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$ , de donde  **$-2b + c = -3$** .

También me dicen que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ , luego existe el límite y se le podrá aplicar la

Regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en  $[a-\delta, a+\delta]$ , derivables en  $(a-$

$\delta, a+\delta)$ , verificando que  $f(a) = g(a) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , entonces si existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  se verifica

que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ . La regla es válida si tenemos  $\infty/\infty$ , y también si  $x \rightarrow \infty$ , con lo cual tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \frac{1 + b + c + d}{0}.$$

Como me dicen que el límite existe, puesto que vale 4, **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir  $1 + b + c + d = 0$ , de donde  **$b + c + d = -1$** . Aplicamos l'Hôpital (L'H):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{x-1} = \{L'H\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2bx + c}{1} = 3 + 2b + c = 4 \text{ (valor del límite), de donde } \mathbf{2b + c = 1}.$$

Resolvemos el sistema:  $-2b + c = -3$ ;  $2b + c = 1$ ;  $b + c + d = -1$ .

Sumando  $1^a$  y  $2^a$  tenemos  $2c = -2$ , de donde  **$c = -1$** . Entrando en la  $1^a$  tenemos  $-2b + (-1) = -3$ , de donde  $-2b = -2$ , luego  **$b = 1$** . Entrando en la  $3^a$  tenemos  $(1) + (-1) + d = -1$ , luego  **$d = -1$** .

**Los valores pedidos son  $b = 1$ ,  $c = -1$  y  $d = -1$  y  $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .**

### Ejercicio 2 opción B, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ .

(a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $2x + y - 7 = 0$  y el eje OX, calculando los puntos de corte.

(c) [1'25 puntos] Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

#### Solución

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ .

(a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

Recta tangente en  $x = 2$  es  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3; \text{ luego } f(2) = -(2)^2 + 2(2) + 3 = 3.$$

$$f'(x) = -2x + 2, \text{ luego } f'(2) = -2(2) + 2 = -2.$$

La recta tangente pedida es  $y - 3 = -2 \cdot (x - 2)$ , luego **la recta tangente pedida es  $y = -2x + 7$** .

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , la recta  $2x + y - 7 = 0$  y el eje OX, calculando los puntos de corte.

Observamos que la recta que nos han dado  $2x + y - 7 = 0$ , es la tangente a  $f$  en  $x = 2$ , es decir  $y = -2x + 7$ . Como es una recta con dos puntos es suficiente para dibujarla, uno es el punto de tangencia  $(2, y(2)) = (2, 3)$  y otro el corte con el eje OX (de ecuación  $y=0$ ), luego de  $0 = -2x + 7$ , tenemos  $x = 7/2 = 3'5$  y el otro punto es  $(3'5, 0)$

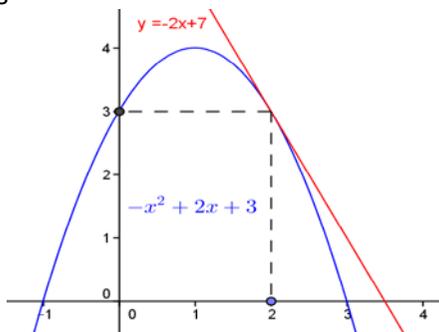
La gráfica de  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  es la de una parábola con las ramas hacia abajo ( $\cap$ ) porque el  $n^\circ$  que multiplica a  $x^2$  es negativo, abscisa del vértice en la solución de  $f'(x) = 0 = -2x + 2$ , de donde  $x = 1$  y el vértice es  $V(1, f(1)) = V(1, 4)$ .

Cortes con los ejes:

Para  $x = 0$ ,  $f(0) = 3$ .

Para  $f(x) = 0$ , tenemos  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ , y nos sale  $x = -1$  y  $x = 3$ . Puntos  $(-1,0)$  y  $(3,0)$ .

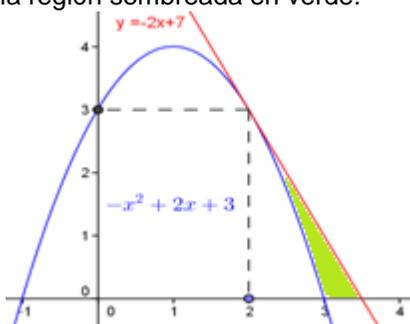
Un esbozo de las gráficas es



(c)

Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Me están pidiendo el área de la región sombreada en verde:



Si observamos la gráfica podemos calcularla como el área del triángulo que determina la recta  $y = -2x + 7$  entre  $x = 2$  y  $x = 3$ , menos el área bajo la parábola  $f(x)$  entre  $x = 2$  y  $x = 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{Área triángulo} - \text{Área bajo parábola} = (1/2) \cdot \text{base} \cdot \text{altura} - \int_2^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \\ &= (1/2) \cdot (3'5 - 2) \cdot (3) - [-x^3/3 + x^2 + 3x]_2^3 = 9/4 - [(-3)^3/3 + (3)^2 + 3(3)] - [(-2)^3/3 + (2)^2 + 3(2)] = \\ &= 9/4 - [(-9+9+9) - (-8/3+4+6)] = 9/4 - (5/3) = \mathbf{7/12 \text{ u}^2} \cong \mathbf{0'5833 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

### Ejercicio 3 opción B, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

Considera las matrices,  $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de  $m$  se verifica que  $A^2 = 2 \cdot A + I$ ? ( $I$  denota la matriz identidad)

b) [1'75 puntos] Para  $m = 1$ , calcula  $A^{-1}$  y la matriz  $X$  que satisface  $A \cdot X - B = A \cdot B$ .

#### Solución

Considera las matrices,  $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a)

¿Para qué valores de  $m$  se verifica que  $A^2 = 2 \cdot A + I$ ? ( $I$  denota la matriz identidad)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix}.$$

$$2 \cdot A + I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}. \text{ Igualando}$$

$$A^2 = 2 \cdot A + I, \text{ tenemos } \begin{pmatrix} m^2+2m+2 & 2 \\ 2 & m^2-2m+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}, \text{ de donde:}$$

$$m^2 + 2m + 2 = 3 + 2m \rightarrow m^2 = 1, \text{ de donde } m = \pm 1.$$

$$2 = 2. \text{ Cierto}$$

$$2 = 2. \text{ Cierto}$$

$$m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \rightarrow m^2 = 1, \text{ de donde } m = \pm 1.$$

**Por tanto la igualdad  $A^2 = 2 \cdot A + I$  es cierta si  $m = \pm 1$ .**

b)

Para  $m = 1$ , calcula  $A^{-1}$  y la matriz  $X$  que satisface  $A \cdot X - B = A \cdot B$ .

Para  $m = 1$ , calcula  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , y como  $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$ , la matriz  $A$

tiene matriz inversa  $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

De  $A \cdot X - B = A \cdot B$ , tenemos  $A \cdot X = B + A \cdot B$ . Como existe  $A^{-1}$ , multiplicamos por la izquierda la expresión  $A \cdot X = B + A \cdot B$ , por  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + A \cdot B) \rightarrow I_2 \cdot X = A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot A \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B + I_2 \cdot B = A^{-1} \cdot B + B$$

$$\text{Luego } X = A^{-1} \cdot B + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Ejercicio 4 opción B, modelo\_3 Junio Incidencias 2014

Considera el punto  $P(2, -2, 0)$  y la recta "r" dada por  $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ .

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a  $P$  y es perpendicular a "r".

b) [1'25 puntos] Calcula la distancia de  $P$  a "r".

#### Solución

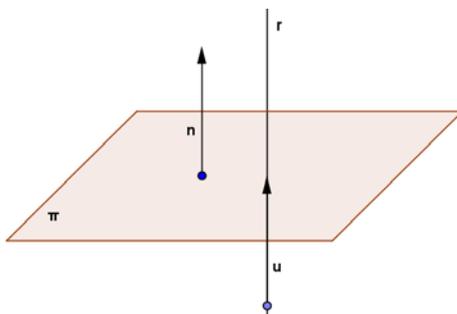
Considera el punto  $P(2, -2, 0)$  y la recta "r" dada por  $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ .

a)

Determina la ecuación del plano que contiene a  $P$  y es perpendicular a "r".

Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando  $z = \lambda \in \mathbb{R}$ , con lo cual "r"  $\equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$ . Un

punto de "r" es  $A(2, 1, 0)$  y un vector director es  $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)$ .



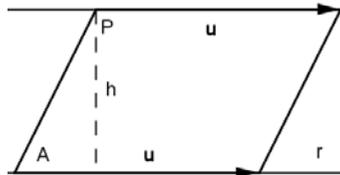
Como el plano es perpendicular a "r" el vector normal del plano  $\mathbf{n}$  coincide con el vector director de "r" el  $\mathbf{u}$ , es decir  $\mathbf{n} = \mathbf{u} = (-1, -1, 1)$ , y la ecuación del plano  $\pi$  es  $\mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0$ , siendo  $X(x, y, z)$  un punto genérico del plano y " $\bullet$ " el producto escalar:

$$\pi \equiv \mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x-2, y+2, z) \cdot (-1, -1, 1) = -x + 2 - y - 2 + z = -x - y + z = 0$$

b)

Calcula la distancia de P a "r".

Calculamos la distancia del punto P a la recta "r", utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector  $\mathbf{u}$ . Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.

El área del paralelogramo determinado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{AP}$  es  $\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \cdot h$ , pero la altura "h" es  $d(P; r)$ , luego  $d(P; r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$  ("x" es el producto vectorial). De "r", punto el  $A(2, 1, 0)$  y vector  $\mathbf{u} = (-1, -1, 1)$ .

$$\text{Punto } P(2, -2, 0). \mathbf{AP} = (0, -3, 0); \mathbf{AP} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3 \cdot 0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(0 - 3) = (-3, 0, -3);$$

$$\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Luego } d(P; r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = 3 \cdot (\sqrt{2}) / (\sqrt{3}) = \sqrt{6} \text{ u.l.}$$