

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}$.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)} = \frac{\tan(0) - \operatorname{sen}(0)}{0 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0}.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital-L'H- (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$), con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \operatorname{sen}(x)} &= (L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{\cos^2(x) - \cos^3(x)} = \frac{0}{0} = (L'H) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)}{-2\cos(x)\operatorname{sen}(x) + 3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)} = \{\text{simplifico } \operatorname{sen}(x)\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos^2(x)}{-2\cos(x) + 3\cos^2(x)} = \frac{3\cos^2(0)}{-2\cos(0) + 3\cos^2(0)} = \frac{3}{-2+3} = 3. \end{aligned}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) [0'75 puntos] Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=3-x$.

b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a)

Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente (R.T.) es $y = 3 - x$.

Si existe dicho punto, en él la función $f(x)$ y la recta tangente coinciden, es decir $f(x) = y$.

Resolvemos la ecuación $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 3 - x$, es decir $x^3 - 3x^2 = 0$ $x^2 \cdot (x - 3) = 0$, de donde $x^2 = 0$ y $x - 3 = 0$, con lo cual $x = 0$ y $x = 3$.

Calculamos la recta tangente en $x = 0$ y $x = 3$, para ver cuál es:

De $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

R.T. en $x = 0 \rightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Como $f(0) = 3$ y $f'(0) = -1$, R.T. $y - 3 = -1(x) \rightarrow y = 3 - x$.

R.T. en $x = 3 \rightarrow y - f(3) = f'(3)(x - 3)$. Como $f(3) = 0$ y $f'(3) = 8$, R.T. $y - 0 = 8(x - 3)$, de donde $y = 8x - 24$.

Con lo cual el punto de la gráfica de $f(x)$ donde la R.T. es $y = 3 - x$, es el punto (0,3).

Otra forma de hacerlo.

La pendiente genérica de la recta tangente a la función $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

La pendiente de la recta tangente $y = 3 - x$ es $y' = -1$.

Iguamos ambas pendiente y vemos si hay solución de dicha ecuación.

De $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = y' = -1$, tenemos $3x^2 - 6x = 0$ $x(3x - 6) = 0$, de donde $x = 0$ y $x = 2$.

R.T. en $x = 2 \rightarrow y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Como $f(2) = -3$ y $f'(2) = -1$, R.T. $y + 3 = -1(x - 2)$, de donde $y = -x + 2 - 3 = -x - 1$. **Con lo cual el punto de la gráfica de $f(x)$ donde la R.T. es $y = 3 - x$, y el punto pedido es (0,3).**

b)

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior

La gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Es una función polinómica, su dominio es \mathbb{R} , y es continua y derivable en \mathbb{R} las veces que necesitemos.

Vemos que $f(1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$, y hemos visto que $f(3) = 0$, luego los cortes con los ejes son $(0,3)$, $(1,0)$ y $(3,0)$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$, cuando x se acerca a $-\infty$, $f(x)$ se acerca a $-\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$, cuando x se acerca a $+\infty$, $f(x)$ se acerca a $+\infty$.

Los extremos relativos anulan la 1ª derivada.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3; f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6}, \text{ de donde los}$$

$$\text{posibles extremos son } x = \frac{6 - \sqrt{48}}{6} \cong -0'15 \text{ y } x = \frac{6 + \sqrt{48}}{6} \cong 2'15.$$

Como $f'(-1) = 8 > 0$, f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-\infty, -0'15)$

Como $f'(0) = -1 < 0$, f es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-0'15, 2'15)$

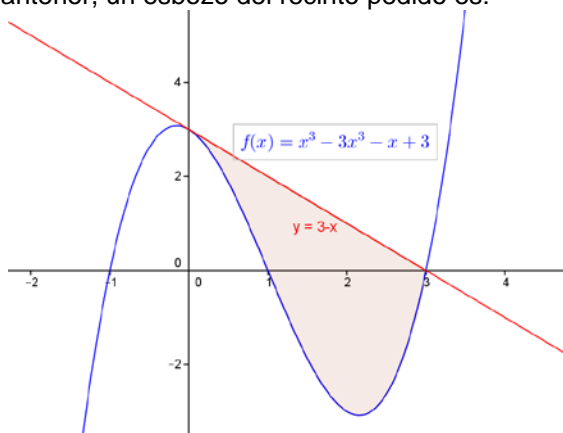
Como $f'(3) = 8 > 0$, f es estrictamente creciente (\nearrow) en $(2'15, \infty)$

Por definición $x = \frac{6 - \sqrt{48}}{6}$ es un máximo relativo y $x = \frac{6 + \sqrt{48}}{6}$ es un mínimo relativo.

Aproximadamente los puntos son $(-0'15, 3'08)$ y $(2'15, -3'08)$.

Para dibujar la recta $y = 3 - x$ con dos puntos es suficiente, y vemos que pasa por $(0,3)$ y $(3,0)$.

Vemos que ambas gráficas coinciden en $x = 0$ y $x = 3$, que serán los límites de integración. Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo del recinto pedido es:



$$\text{Área} = \int_0^3 ((3-x) - (x^3 - 3x^2 - x + 3)) dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} \right]_0^3 = -81/4 + 27 - 0 = 27/4 = 6'75 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\lambda y + (\lambda + 1)z = \lambda$$

$$\lambda x + z = \lambda$$

$$x + \lambda z = \lambda$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro λ .

b) [0'5 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

c) [0'5 puntos] Para $\lambda = 0$, si es posible, da tres soluciones distintas.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\lambda y + (\lambda+1)z = \lambda$$

$$\lambda x + z = \lambda$$

$$x + \lambda z = \lambda$$

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro λ .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} = -(\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1). \\ \text{columna} \end{array}$$

Resolviendo la ecuación $-(\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) = 0$, obtenemos $\lambda = 0$ y $\lambda^2 - 1 = 0$, de donde $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} = -(-1) \cdot (1 + 1) = 2 \neq 0, \\ \text{columna} \end{array}$ tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$. **El sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si $\lambda = 0$ (Apartado (c))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de ceros, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 2ª y 3ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero.

$$z = 0$$

$$x = 0$$

Tomando $\mathbf{y} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, y las soluciones del sistema son $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{0})$ con $b \in \mathbb{R}$.

Como me piden tres soluciones le doy a "b" tres valores distintos tengo tres soluciones distintas. Tomando $b = 1$, $b = 2$ y $b = 3$ las soluciones son $(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $(\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$

Si $\lambda = 1$ (Apartado (b))

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de unos, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 2ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero.

$$y + 2z = 1$$

$$x + z = 1$$

Tomando $\mathbf{z} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, tenemos $x = 1 - b$ e $y = 1 - 2b$, y las infinitas soluciones del sistema son $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{1} - \mathbf{b}, \mathbf{1} - \mathbf{2b}, \mathbf{b})$ con $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Sean A(-3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (-1, 2, 1) los vértices de un triángulo.

a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

c) [0'5 puntos] Calcula el área del triángulo ABC.

Solución

Sean A(-3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (-1, 2, 1) los vértices de un triángulo.

a)

Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

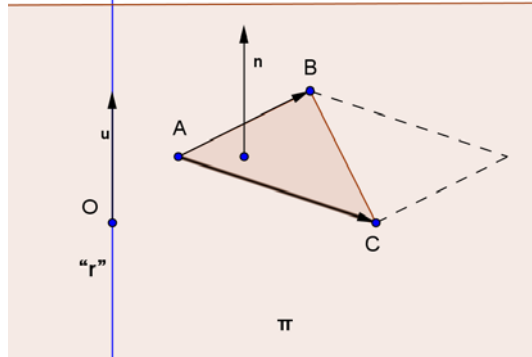
Para un plano necesito un punto el A(-3,4,0), y dos vectores independientes, el $\mathbf{AB} = (6,2,3)$ y el $\mathbf{AC} = (2,-2,1)$

La ecuación general del plano pedida es $\det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 0$, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 0 = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x+3)(2+6) - (y-4)(6-6) + (z)(-12-4) =$$

$$= 8x + 24 - 16z = 0 = x - 2z + 3 = 0.$$

Un esbozo de la figura es:



b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

Para una recta "r" necesitamos un punto, el $O(0,0,0)$, y un vector de dirección, el u , nos sirve el vector normal del plano $\pi \equiv x - 2z + 3 = 0$, el $n = (1,0,-2)$.

Pongo la **ecuación vectorial de la recta "r" es $(x,y,z) = (0+1 \cdot \lambda, 0+0 \cdot \lambda, 0-2 \cdot \lambda) = (\lambda, 0, -2 \cdot \lambda)$** , con $\lambda \in \mathbb{R}$, y $X(x,y,z)$ un punto genérico de la recta "r".

c) Calcula el área del triángulo ABC.

Sabemos que el área de un triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan sus vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} , es decir 1/2 módulo ($\| \ \|$) del producto vectorial (\times) de dichos vectores.

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \vec{i}(2+6) - \vec{j}(6-6) + \vec{k}(-12-4) = (8,0,-16).$$

$$\text{Área triángulo} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = (1/2) \cdot \sqrt{(8^2 + 16^2)} = (1/2) \cdot \sqrt{(320)} u^2 \cong 8'944 u^2.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

- a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
- b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Asíntotas verticales (A.V.) (la recta $x = a$ es A.V. si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$)

Como no hay números que anulen el denominador, recordamos que la exponencial no se anula nunca, f no tiene A.V.

Asíntotas horizontales (A.H.) (la recta $y = b$ es A.H. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$)

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{e^{x^2}} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty}, \text{ L'Hôpital, L'H, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x}{2xe^{x^2}} \right) =$$

= {simplifico} = $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{e^{x^2}} \right) = 1/+\infty = 0$, la recta **y = 0** es una **A.H en $\pm \infty$** .

Como la función f(x) tiene asíntota horizontal en $\pm \infty$, y no es una función a trozos, **f(x) no tiene asíntotas oblicuas en $\pm \infty$** .

b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía. El estudio de la 1ª derivada

$f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (2x) \cdot (1 - x^2)$

De $f'(x) = 0$, tenemos $(2x) \cdot (1 - x^2) = 0$, puesto que la exponencial e^{-x^2} nunca se anula.

Las soluciones de $(2x) \cdot (1 - x^2) = 0$, son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-2) = (+) \cdot (-4) \cdot (-3) = (+) \cdot (12) > 0$, f(x) es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-\infty, -1)$

Como $f'(-0.5) = (+) \cdot (-1) \cdot (0.75) = (+) \cdot (-0.75) < 0$, f(x) es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-1, 0)$

Como $f'(0.5) = (+) \cdot (1) \cdot (0.75) = (+) \cdot (0.75) > 0$, f(x) es estrictamente creciente (\nearrow) en $(0, 1)$

Como $f'(2) = (+) \cdot (4) \cdot (-3) = (+) \cdot (-12) < 0$, f(x) es estrictamente decreciente (\searrow) en $(1, +\infty)$

Por definición $x = -1$ es un máximo relativo que vale $f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-1} = 1/e \cong 0.37$.

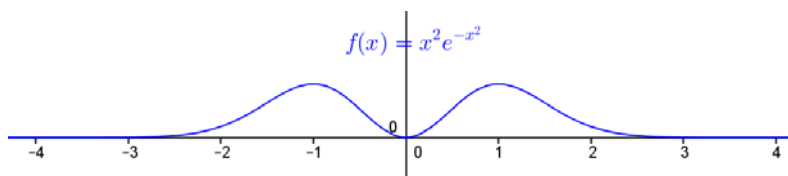
Por definición $x = 0$ es un mínimo relativo que vale $f(0) = (0)^2 \cdot e^0 = 0$.

Por definición $x = 1$ es un máximo relativo que vale $f(1) = (1)^2 \cdot e^{-1} = 1/e \cong 0.37$.

c)

Esboza la gráfica de f.

Teniendo en cuenta lo anterior y que de para $x = 0$ $f(0) = 0$, y de que de $f(x) = 0$ $x^2 = 0$, puesto que la exponencial no se anula nunca, un esbozo de la gráfica es



Ejercicio 2 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2.5 puntos] Sea $f : (-1,3) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x + 9}{(x + 1)(x - 3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Solución

Una primitiva de f(x) es $F(x) = \int \frac{x + 9}{(x + 1)(x - 3)} dx$, que es una integral racional con grado del numerador menor que el grado del denominador, luego:

$F(x) = \int \frac{x + 9}{(x + 1)(x - 3)} dx = \int \frac{A}{(x + 1)} dx + \int \frac{B}{(x - 3)} dx = A \cdot \ln|x + 1| + B \cdot \ln|x - 3| + k$.

Calculamos A y B de la igualdad $\frac{x + 9}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x - 3)} = \frac{A(x - 3) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)}$

Igualando numeradores $\rightarrow x + 9 = A \cdot (x - 3) + B \cdot (x + 1)$.

Para $x = 3$ sustituyendo $\rightarrow 3 + 9 = A \cdot (3 - 3) + B \cdot (3 + 1) \rightarrow 12 = 4B \rightarrow B = 3$.

Para $x = -1$ sustituyendo $\rightarrow -1 + 9 = A \cdot (-1 - 3) + B \cdot (-1 + 1) \rightarrow 8 = -4A \rightarrow A = -2$.

La primitiva es $F(x) = -2 \cdot \ln|x + 1| + 3 \cdot \ln|x - 3| + k$, y como pasa por el punto $(1,0)$, tenemos:
 $F(1) = 0 = -2 \cdot \ln|1 + 1| + 3 \cdot \ln|1 - 3| + k \rightarrow k = 2\ln(2) - 3\ln(2) = -\ln(2)$, por tanto **la primitiva de f que pasa por $(1,0)$ es $F(x) = -2 \cdot \ln|x + 1| + 3 \cdot \ln|x - 3| - \ln(2)$.**

Ejercicio 3 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz X que verifica $A^{-1} \cdot X \cdot A = B - A$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz X que verifica $A^{-1} \cdot X \cdot A = B - A$.

La matriz A tienen matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$, porque $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos
primera =
fila

$= 1 \cdot (-6+5) = -1 \neq 0$.

Multiplicando la expresión $A^{-1} \cdot X \cdot A = B - A$, por la izquierda por la matriz A y por la derecha por la matriz A^{-1} , tenemos $A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} - A \cdot A \cdot A^{-1} \rightarrow I \cdot X \cdot I = A \cdot B \cdot A^{-1} - A \cdot I \rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1} - A$.

Calculamos $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}; A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } X = A \cdot B \cdot A^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 16 & -6 \\ -2 & 40 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 18 & -7 \\ -2 & 45 & -18 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera el punto $A(8, -1, 3)$ y la recta "r" dada por $\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$.

- a) [1'25 puntos] Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
- b) [1'25 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto de r.

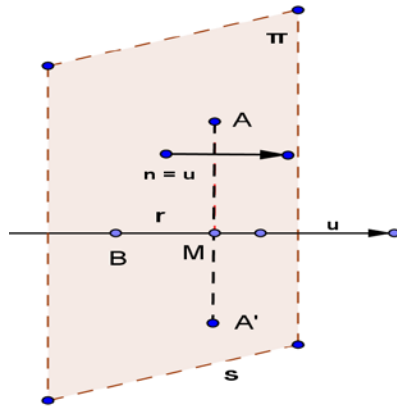
Solución

Considera el punto $A(8, -1, 3)$ y la recta "r" dada por $\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$.

- a)
- Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

De la recta "r" dada por $\frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{3}$, tomamos un punto, el B(-1,2,1) y un vector director, el $\mathbf{u} = (2,1,3)$.

Preparamos una figura para los dos apartados:



El plano que pasa por el punto A(8,-1,3) y es perpendicular a la recta "r", tiene por vector normal \mathbf{n} , el vector director de la recta, el $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (2,1,3)$.

El plano π tiene de ecuación $\mathbf{AX} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde X(x,y,z) es un punto genérico del plano y \bullet es el producto escalar de dos vectores:

$$\pi \equiv \mathbf{AX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x-8, y+1, z-3) \cdot (2,1,3) = 2x - 16 + y + 1 + 3z - 9 = \mathbf{2x + y + 3z - 24 = 0.}$$

b)

Halla el punto simétrico de A respecto de r.

Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando como punto el B(-1,2,1) y como vector de

$$\text{dirección el } \mathbf{u} = (2,1,3), \text{ con lo cual "r"} \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculamos el punto de corte M del plano " π " con la recta "r", sustituyendo la recta en el plano:

$$2(-1+2\lambda) + (2+\lambda) + 3(1+3\lambda) - 24 = 0 \rightarrow -21+14\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 21/14 = 3/2.$$

$$\text{El punto M es } M(-1+2(3/2), 2+(3/2), 1+3(3/2)) = M(2, 7/2, 11/2).$$

El punto A'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto M es el punto medio del segmento AA'.

$$(2, 7/2, 11/2) = ((x+8)/2, (y-1)/2, (z+3)/2), \text{ de donde:}$$

$$2 = (x+8)/2 \rightarrow x = -4.$$

$$7/2 = (y-1)/2 \rightarrow y = 8.$$

$$11/2 = (z+3)/2 \rightarrow z = 8.$$

El simétrico A' de A respecto a la recta "r" es A'(-4,8,8).