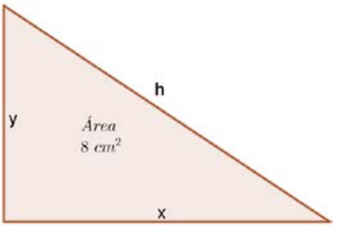
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

[2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Solución

De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.



Función a minimizar: Hipotenusa = h = área rectángulo + área base = $(2\pi r).h + \pi r^2$.
Relación entre las variables: Área rectángulo = 8 = (1/2)·cateto·cateto = (1/2)·xy.
Por otro lado por el teorema de Pitágoras, $h^2 = x^2 + y^2$. Como "h" es una longitud h = $+\sqrt{x^2+y^2}$

De 8 = (1/2)·xy, tenemos y = 16/x, luego h(x) = $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}$

Función a minimizar h(x) = $\sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}$.

Si h'(a) = 0 y h''(a) > 0, x = a es un mínimo de h(x).

$$h'(x) = \frac{\frac{(4x^3)(x^2) - (x^4+256)(2x)}{\left(x^2\right)^2}}{2\sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}} = \frac{\frac{(2x)(2x^4 - (x^4+256))}{2x^4\sqrt{x^4+256}}}{x} = \frac{(2x^2)(x^4-256)}{2x^4\sqrt{x^4+256}} = \frac{x^4-256}{x^2\sqrt{x^4+256}}.$$

De h'(x) = 0 tenemos $x^4 - 256 = 0$, luego x = $\pm\sqrt[4]{256} = \pm 4$ Como es una longitud, x = 4 cm.

tenemos $2\pi r^3 = 250$, y r = $\sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ m. ≅ 3'414 m.

Veamos que es un mínimo es decir h''(4) > 0.

$$h'(x) = \frac{x^4-256}{x^2\sqrt{x^4+256}}. ; h''(x) = \frac{4x^3\cdot x^2\sqrt{x^4+256} - (x^4-256)\cdot\left(2x\sqrt{x^4+256} + x^2\cdot\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+256}}\right)}{\left(x^2\sqrt{x^4+256}\right)^2}.$$

Como h''(4) = $\frac{4(4)^3\cdot(4)^2\sqrt{(4)^4+256} - 0}{\text{numero positivo}}$ = número positivo > 0, x = 4 es un mínimo

La longitud de la hipotenusa pedida es h(4) = $\sqrt{\frac{4^4+256}{4^2}} = \sqrt{32}$ cm. ≅ 5'66 cm.

Las dimensiones del rectángulo pedido son x = 4 cm., y = 4 cm., por tanto el triángulo rectángulo es isósceles (dos lados iguales), y la hipotenusa es h(4) = $\sqrt{32}$ cm. ≅ 5'66 cm.

Ejercicio 2 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$. (Sugerencia: cambio de variable t = $\sqrt{x}$)

Solución

Calcula I = $\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ = { t = $\sqrt{x}$ → t^2 = x → 2tdt = dx} = $\int \frac{2tdt}{2t^2(t^2+t)} = \int \frac{dt}{t(t)(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2(t+1)}$ =

= {integral racional} $= \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t^2} + \int \frac{Cdt}{t+1}$ = A·ln|t| - B/t + C·ln|t+1| + K.

Calculamos A, B y C.

$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} = \frac{At(t+1) + B(t+1) + Ct^2}{t^2(t+1)}$, igualando numeradores tenemos:

1 = At(t+1) + B(t+1) + Ct^2.

De t = 0 → 1 = B.

De t = -1 → 1 = $C(-1)^2$ = C

Tomando t = 1 → 1 = A(2) + 1(2) + $1(1)^2$ → 1 = 2A + 3 → A = -1.

Luego I = A·ln|t| - B/t + C·ln|t+1| + K = -1ln|t| - 1/t + ln|t+1| + K = {quitando cambio} =

= -1ln| $\sqrt{x}$ | - 1/ $\sqrt{x}$ + ln| $\sqrt{x}$ +1| + K, es decir la integral pedida es:

$\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ **= -ln| $\sqrt{x}$ | - 1/ $\sqrt{x}$ + ln| $\sqrt{x}$ + 1| + K.**

Ejercicio 3 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, haya los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

(a) [1 punto] $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$. (A^t indica la traspuesta de A).

(b) [0'75 puntos] det $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$. (c) [0'75 puntos] det $\begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix}$.

Solución

Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, haya los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

(a)

$\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$. (A^t indica la traspuesta de A).

La matriz A que me han dado es simétrica y coincide con su traspuesta, luego A = A^t.

(i) Sabemos que $\det(2\cdot A_n) = (2)^n\cdot\det(A_n)$, $\det(A^t) = \det(A)$, det(A·B) = det(A)·det(B) y que $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A))$, porque de $A^{-1}\cdot A = I$, aplicándole determinantes $|A^{-1}\cdot A| = |I| = 1 = |A^{-1}|\cdot|A|$, luego $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Luego **$\det(A^3)$** = det(A)·det(A)·det(A) = 3·3·3 **= 27.**

$\det(A^{-1})$ = 1/(det(A)) = **1/3.**

$\det(A + A^t)$ = det(A + A) = det(2A) = $(2)^3$·3 = 8·3 **= 24.**

(b)

det $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$.

(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii) Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$ = {aplicamos (ii)} = $(2)\cdot\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{pmatrix}$ = {aplicamos (iii)} =

$= (2)(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = (2)(-1)(3)$ **= -6**.

(c)

$\det\begin{pmatrix} a & b & 4a\text{-}c \\ b & d & 4b\text{-}e \\ c & e & 4c\text{-}f \end{pmatrix}$.

(iv) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el premier y segundo sumando respectivamente.

(v) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

$\det\begin{pmatrix} a & b & 4a\text{-}c \\ b & d & 4b\text{-}e \\ c & e & 4c\text{-}f \end{pmatrix}$ = {aplicamos (iv)} = $\det\begin{pmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & d & -e \\ c & e & -f \end{pmatrix}$ = {aplicamos (ii), (iii) y (v)} = $0 + (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = (-1)\cdot(3)$ **= -3**.

Ejercicio 4 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

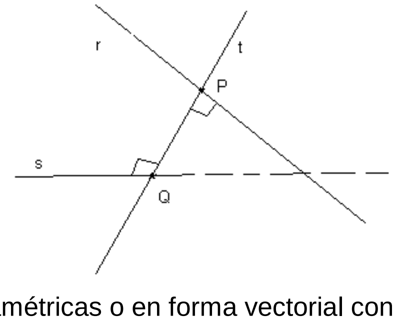
Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y "s" la recta dada por $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.
b) [0'75 puntos] Calcula la distancia entre r y s

Solución

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y "s" la recta dada por $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

a)
Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.
Forma (1) de hacerlo



Ponemos ambas recta en paramétricas o en forma vectorial con un parámetro distinto
De la recta "r" punto A(1,1,0) y vector director **u** = (1,1,1)
De la recta "s" punto B(1,0,1) y vector director **v** = (-2,1,-2)

german.jss@gmail.com

$r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1) = (1+\lambda, 1+\lambda, \lambda)$
$s \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(-2,1,-2) = (1-2\mu, \mu, 1-2\mu)$

De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico $X(x,y,z) = X(1+\lambda, 1+\lambda, \lambda)$
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico $Y(x,y,z) = Y(1-2\mu, \mu, 1-2\mu)$
El vector **XY** tiene que ser perpendicular al vector director de "r" **u** y al vector director de "s" **v** a la vez, es decir su producto escalar (**•**) tiene que ser cero:
$\mathbf{XY} = (1-2\mu-1-\lambda, \mu-1-\lambda, 1-2\mu-\lambda) = (-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda)$
$\mathbf{XY}\bullet\mathbf{u} = 0$
$(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda)\bullet(1,1,1) = 0 = -2\mu-\lambda -1+\mu-\lambda +1-2\mu-\lambda) = -3\mu-3\lambda = 0 \rightarrow \boldsymbol{\mu = -\lambda}$
$\mathbf{XY}\bullet\mathbf{v} = 0$
$(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda)\bullet(-2,1,-2) = 0 = -2(-2\mu-\lambda) -1+\mu-\lambda -2(1-2\mu-\lambda) = 4\mu+2\lambda-1+\mu-\lambda-2+4\mu+2\lambda =$
$= -3+9\mu+3\lambda = 0 = -1+3\mu+\lambda = 0$

Resolvemos el sistema
$\mu = -\lambda$
$-1+3\mu+\lambda = 0 \rightarrow -1-3\lambda+\lambda = 0 \rightarrow -1-2\lambda = 0 \rightarrow \boldsymbol{\lambda = -1/2} \rightarrow \boldsymbol{\mu = 1/2}$.
Entrando en el punto genérico X con el valor de $\lambda = -1/2$, obtenemos el punto P que es
$P(1+(-1/2), 1+(-1/2), (-1/2)) = P(1/2, 1/2, -1/2)$
Entrando en el punto genérico Y con el valor de $\mu = 1/2$, obtenemos el punto Q que es
$Q(1-2(1/2), (1/2), 1-2(1/2)) = Q(0, 1/2, 0)$
La recta pedida "t" es la que pasa por los punto P y Q, es decir t(Q;**QP**)
Q(0, 1/2, 0)
$\mathbf{QP} = (1/2-0, 1/2-1/2, -1/2-0) = (1/2, 0, -1/2)$
La recta pedida es $t \equiv (x,y,z) = (0, 1/2, 0) + \delta(1/2, 0, -1/2)$ con $\delta \in R$.
b)
Calcula la distancia entre r y s

La distancia entre las rectas "r" y "s" es $d(r;s) = ||\mathbf{QP}|| = \sqrt{(1/2)^2+(0)^2+(1/2)^2} = \sqrt{1/2}\ u^1$

a)
Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.
Forma (2) de hacerlo
$r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1)$; $s \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(-2,1,-2)$

La recta "t" la vamos a dar como intersección de dos planos π_1 y π_2
El vector **u**x**v** es un vector perpendicular a la vez a las recta "r" y "s", luego tiene la dirección de la recta pedida.

$$\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2-1) - \mathbf{j}(-2+2) + \mathbf{k}(1+2) = (-3,0,3)$$

Plano $\pi_1 \equiv$ det(A;**u**; **u**x**v**) = 0 , es decir plano que contiene a la recta "r" y al vector **u**x**v**, es decir:

$$\pi_1 \equiv \det(A;\mathbf{u};\mathbf{u}\mathrm{x}\mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)(3-0) - (y-1)(3+3) + (z)(0+3) = 3x - 6y + 3z + 3 =$$

$= x - 2y + z + 1 = 0$
Plano $\pi_2 \equiv$ det(B;**v**; **u**x**v**) = 0, es decir plano que contiene a la recta "s" y al vector **u**x**v**, es decir:

$\pi_2 \equiv \det(B;\mathbf{v};\mathbf{u}\text{x}\mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)(3-0) - (y)(-6-6) + (z-1)(0+3) = 3x + 12y + 3z - 6 =$

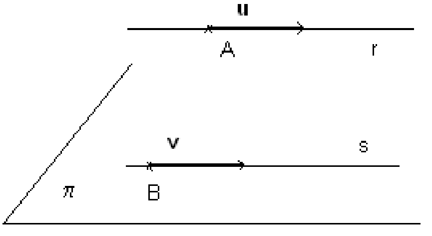
$= x + 4y + z - 2 = 0$

La recta "t" pedida es $t \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x + 4y + z - 2 = 0 \end{cases}$

b)
Calcula la distancia entre r y s

$r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1)$; $s \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(-2,1,-2)$

Distancia de un punto de una recta a un plano que contiene a la otra y es paralelo a la primera

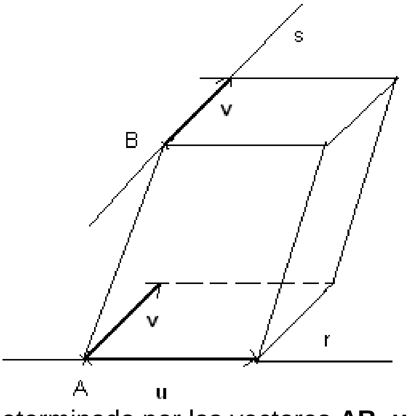


De "r" tenemos A(1,1,0) y **u** = (1,1,1)
De "s" tenemos B(1,0,1) y **v** = (-2,1,-2)
El plano π que contiene a la recta "s" y es paralelo a la recta "r" tiene de ecuación:
det(**BX**,**v**,**u**) = 0

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-1)(1+2) - (y)(-2+2) + (z-1)(-2-1) = 3x - 3z = 0 = x - z = 0$

$d(r;s) = d(A;\pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|(1) - (0)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ u^1$

También podríamos calcular la distancia entre las rectas "r" y "s" por producto mixto.



Formamos el paralelepípedo determinado por los vectores **AB**, **u** y **v**
Volumen paralelepípedo = |{ **AB**, **u**, **v** }| = área base por altura = ||**u**x**v**||·d(r;s), de donde
d(r;s) = (| [**AB**, **u**, **v**] |) / (||**u**x**v**||)

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Sea f: R → R la función derivable definida por $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

a) [1'25 puntos] Calcula a y b.

b) [1'25 puntos] Para a = 3 y b = 2 calcula los extremos absolutos de f en el intervalo [0,e] (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

Sea f: R → R la función derivable definida por $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

a)
Calcula a y b.

Como f(x) es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su dominio; en particular es continua y derivable en x = 1.

Como es continua en x = 1 , $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (a - x) = a - 1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{b}{x} + \ln(x)\right) = \dfrac{b}{1} + \ln(1) = b$;

Igualando **b = a - 1.**

$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{-b}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Como es derivable en x = 1, tenemos $f'(1^+) = f'(1^-)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1$; $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{-b}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right) = -b + 1$.

Igualando tenemos -1 = -b+1 → **b = 2** y **a** = 2 + 1 **= 3.**

b)
Para a = 3 y b = 2 calcula los extremos absolutos de f en el intervalo [0,e] (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Como la función es derivable los extremos absolutos se encuentran en x = 0, x = e (extremos del intervalo [0,e]) y en los puntos que anula f'(x).

Si x < 1 → f'(x) = -1 = 0. Esto es absurdo.

Si x > 1 → $f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = 0 \to \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{1}{x} \to 2x = x^2 \to 2x - x^2 = 0 = x(2 - x) = 0$, de donde tenemos x = 0 (ya lo teníamos) y x = 2.

Si x < 1 → f(x) = 3 - x → **f(0)** = 3 - 0 **= 3**.

Si x > 1 → $f(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$ → f**(2)** = $\dfrac{2}{2} + \ln(2) \cong$ **1'69** → $f(e) = \dfrac{2}{e} + \ln(e) \cong 1'73$.

Por tanto el máximo absoluto se alcanza en x = 0 y vale f(0) = 3, y el mínimo absoluto se alcanza en x = 2 y vale f(2) = 1 + ln(2) ≅ 1'69.

Ejercicio 2 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

b) [1'5 puntos] Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 0).

Solución

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.

a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

La recta tangente en x = 0 es "$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$"

$f(x) = e^x \cdot \cos(x)$; $f'(x) = e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \text{sen}(x)$.

Por tanto $f(0) = e^0 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$ y $f'(0) = e^0 \cdot \cos(0) - e^0 \cdot \text{sen}(0) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.

La recta tangente pedida es "$y - 1 = 1(x - 0)$" → $y = x + 1$.

b)

Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 0).

Una primitiva es $F(x) = I = \int e^x \cdot \cos(x)dx$ = {Integral por partes por partes $\int udv = uv - \int vdz$. En nuestro caso $u = e^x$ y $dv = \cos(x)dx$, de donde, $du = e^x dx$ y $v = \int dv = \text{sen}(x)$ } $= e^x \cdot \text{sen}(x) - \int e^x \cdot \text{sen}(x) = e^x \cdot \text{sen}(x) - I_1$.

$I_1 = \int e^x \cdot \text{sen}(x)dx =$ = {Integral por partes por partes. En nuestro caso $u = e^x$ y $dv = \text{sen}(x)dx$, de donde, $du = e^x dx$ y $v = \int dv = -\cos(x)$ } $= - e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \cos(x) = - e^x \cdot \cos(x) + I$.

Tenemos $I = e^x \cdot \text{sen}(x) - I_1 = e^x \cdot \text{sen}(x) - (- e^x \cdot \cos(x) + I) = e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x) - I$, de donde:

$2I = e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x) \to I = (e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x))/2 + K$.

Una primitiva es $F(x) = (e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x))/2 + K$, como dicen que pasa por (0,) tenemos:

$F(0) = 0 = (e^0 \cdot \text{sen}(0) + e^0 \cdot \cos(0))/2 + K = 1/2 + K$, de donde **$K = -1/2$ y la primitiva pedida es: $F(x) = (e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x))/2 - 1/2$.**

Ejercicio 3 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} mx - 2y + z &= 1 \\ x - 2my + z &= -2 \\ x - 2y + mz &= 1 \end{aligned}$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [0'75 puntos] Si es posible, resuelve el sistema para m = -2.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} mx - 2y + z &= 1 \\ x - 2my + z &= -2 \\ x - 2y + mz &= 1 \end{aligned}$$

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro m.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2m & 1 & -2 \\ 1 & -2 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiamos los rangos de A y A* para discutir el sistema. Si $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = 3

german.jss@gmail.com

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix}_{F_3-F_1} = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1-m & 0 & m-1 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila}\end{matrix} =$$

$= (1-m)(-2+2m) + 0 + (m-1)\cdot(-2m^2+2) = (m-1)(2-2m) + (m-1)\cdot(-2m^2+2) =$
$= (m-1)\cdot(2-2m-2m^2+2) = (m-1)\cdot(-2m^2-2m+4)$.
Resolviendo la ecuación $|A| = 0 = (m-1)\cdot(-2m^2-2m+4) = 0$, tenemos $m = 1$ y $-2m^2-2m+4=0$, de donde $m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1\pm 3}{2}$, de donde $m = 1$ y $m = -2$.

Si **$m \neq 1$ y $m \neq -2$**, $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **m = 1**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como la 2ª y 3ª filas son iguales entre si e igual a la primera, sólo tenemos una fila independiente, pues las demás dependen de ella, por tanto rango(A) = 1.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$, tenemos rango(A*) = 2.

Como rango(A) = 1 $\neq$ rango(A*) = 2. **El sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **m = -2 (Apartado (b))**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_3+2F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna}\end{matrix} = 1(0-0) = 0$, rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 1ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero, y al ser rango 2, hay dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

$-2x - 2y = 1 - z. \quad \rightarrow \quad -2x - 2y = 1 - z$
$x + 4y = -2 - z \; E_2 - E_1 \quad \rightarrow \quad 3x + 6y = -3 \rightarrow 6y = -3-3x \quad \rightarrow y = -1/2-x/2$. Entrando en la 1ª ecuación $-2x - 2(-1/2-x/2) = 1 - z \quad \rightarrow \quad -2x + 1 + x = 1 - z \quad \rightarrow \quad -x = -z$, luego $x = z$, con lo cual $y = -1/2-x/2 = -1/2-z/2$

Tomo **$z = b$** $\in$ R, y las soluciones del sistema son **$(x,y,z) = (b,-1/2-b/2,b)$** con $b \in$ R.

Ejercicio 4 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Considera el plano π de ecuación $2x+y - z + 2 = 0$, y la recta r de ecuación $\dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{-3}$.

a) [0'5 puntos] Determina la posición relativa de π y r.
b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

c) [1 punto] Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r.

Solución

Considera el plano π de ecuación 2x+y - z + 2 = 0, y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$.

a)
Determina la posición relativa de π y r.

Ponemos la recta "r" en vectorial o paramétrica y entramos con ella en la ecuación del plano. Resolvemos dicha ecuación con una incógnita y lo interpretamos.
De "r" punto el A(5,0,6) y vector director el **u** = (-2,1,-3). Ecuación vectorial:
$(x,y,z) = (5,0,6) + \lambda\cdot(-2,1,-3) = (5-2\lambda,\lambda,6-3\lambda)$ con $\lambda \in R$. Sustituimos en "π"
$2(5-2\lambda) + (\lambda) - (6-3\lambda) + 2 = 0 \rightarrow 10 - 4\lambda + \lambda - 6 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow 0\cdot\lambda + 6 = 0 \rightarrow$ **0 = -6. Esto es absurdo, por tanto la recta es paralela al plano y no está contenida en él**
b)
Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Para un plano π_1 necesitamos un punto y dos vectores independientes. Como contiene a la recta "r" tomamos como punto el de la recta, el A(5,0,6), y uno de los vectores el director de la recta, el **u** = (-2,1,-3). Como el plano es perpendicular al plano π el otro vector es el normal del plano π el **n =** (2,1,-1).

Ecuación general del plano π_1, puntos X(x,y,z) tal que det(**AX,u,n**) = 0.

$$\boldsymbol{\pi_1} \equiv \det(\mathbf{AX,u,n}) = 0 = \begin{vmatrix} x-5 & y & z-6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = (x-5)(-1+4) - (y)(2+6) + (z-6)(-2-2) =$$

$= 3x - 8y - 4z + (-15+24) = 0 =$ $\mathbf{3x - 8y - 4z + 9 = 0.}$
c)
Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r.

La ecuación de un plano π_2, paralelo al plano π es de la forma 2x+y - z + K = 0, porque tiene el mismo vector normal π. Como me dicen que contiene a "r" y hemos visto en el apartado (a) que "r" y π son paralelos y distintos, le imponeos la condición al plano de que contenga al punto A(5,0,6) $\rightarrow$ 2(5) + (0) - (6) + K = 0, de donde K = - 4.
El plano pedido $\pi_2 \equiv 2x+y - z - 4 = 0$.
Me piden las ecuaciones paramétricas:
Toma $x = \lambda \in R$, $z = \mu \in R$ con lo cual $y = 4 - 2\lambda + \mu$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}, \text{ con } \lambda, \mu \in R.$$