PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2000

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \lambda & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \lambda \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Tomando $\lambda = 1$, resuelve el sistema escrito en forma matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = 1$$

Luego, la matriz no tiene inversa para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

b) El sistema que tenemos que resolver es:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{array} \right. \qquad \text{y, además, la solución trivial}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}$

a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.
b) Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.
c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a y c) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \; ; \; \lambda = -7$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = -7$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 1 \; y \; -7$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ -x + 2z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 1 - z \\ z = z \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x+2y-5z=1} \\ \mathbf{4x+\ \ y-2z=3} \\ \mathbf{2x-3y+az=b} \end{array}\right.$

a) Determina *a* y *b* sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.
b) Resuelve el sistema resultante.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -5a + 44 = 0 \Rightarrow a = \frac{44}{5}$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a cero

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & b \end{vmatrix} = -5b + 25 = 0 \Rightarrow b = 5$$

b) El sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1+5z \\ 4x+y=3+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{5-z}{5} \\ y = \dfrac{-5+14z}{5} \\ z = z \end{array}\right.$$

Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ : $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x+\lambda y+z=0} \\ \mathbf{\lambda x+y+z=0} \\ \mathbf{x+y+\lambda z=0} \end{array}\right.$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 \Rightarrow \lambda = 1 \; ; \; \lambda = -2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	1	1	S. Homogéneo compatible
$\lambda = -2$	2	2	S. Homogéneo compatible
$\lambda \neq 1 \; y \; -2$	3	3	S. Homogéneo incompatible

Para $\lambda = 1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$x + y + z = 0 \} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{array}\right. \quad \text{y ,además, la solución trivial}$$

Para $\lambda = -2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = z \\ z = z \end{array}\right. \quad \text{y ,además, la solución trivial}$$

Para $\lambda \neq 1 \; y \; -2$, el sistema sólo tiene la solución trivial.

Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial: $\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *b*.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = -b^2 + 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \ ; \ b = -1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$b = 1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$b = -1$	2	3	S. incompatible
$b \neq 1 \ y \ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) El sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

Un mayorista de café dispone de tres tipos base, Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla, *A*, *B* y *C*, que envasa en sacos de 60 Kg. Con los siguientes contenidos en Kilos y precio del Kilo en euros:

	Mezcla *A*	Mezcla *B*	Mezcla *C*
Moka	**15**	**30**	**12**
Brasil	**30**	**10**	**18**
Colombia	**15**	**20**	**30**
Precio (cada Kg.)	**4**	**4’5**	**4’7**

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si llamamos x = al precio del Kg de Moka.
y = al precio del Kg de Brasil.
z = al precio del Kg de Colombia.

El sistema es:

$$\left.\begin{aligned} 15x+30y+15z&=60\cdot 4\\ 30x+10y+20z&=60\cdot 4'5\\ 12x+18y+30z&=60\cdot 4'7\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} 15x+30y+15z&=240\\ 30x+10y+20z&=270\\ 12x+18y+30z&=282\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y+z&=16\\ 3x+y+2z&=27\\ 2x+3y+5z&=47\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=4\\ y&=3\\ z&=6\end{aligned}\right.$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+\lambda y+(\lambda-1)z = \ \ 1 \\ y+z = \ \ 1 \\ 2x+y-z = -3 \end{cases}$

a) Halla todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.
b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.
c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=3$$

Luego, para que el sistema tenga al menos dos soluciones distintas $\lambda=3$

b) El sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+z \\ y=1-z \\ z=z \end{cases}$$

c) Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq 3$	2	3	S. Incompatible