PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2000

MATEMÁTICAS II

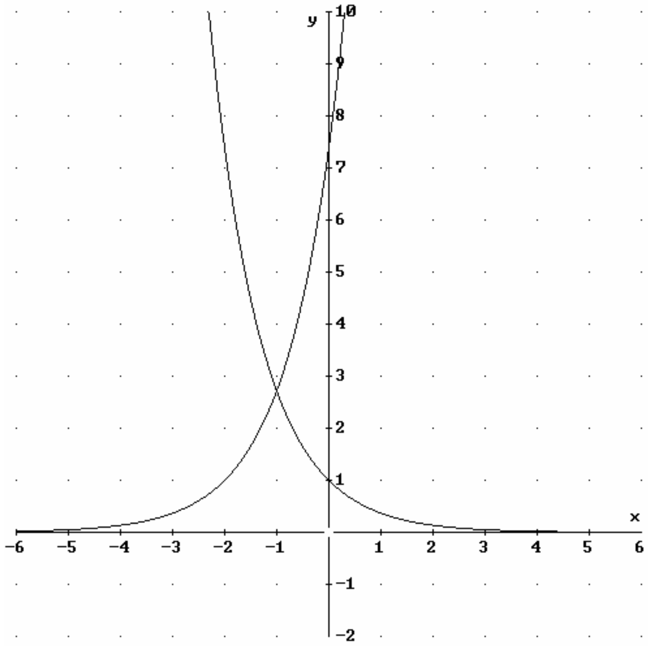
TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas: $y = e^{x+2}$; $y = e^{-x}$; $x = 0$
b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

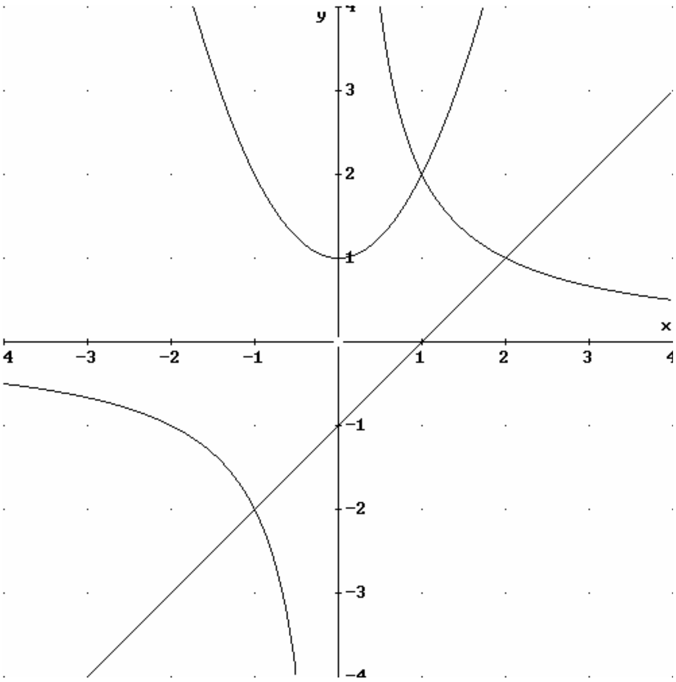
$$A = \int_{-1}^{0} (e^{x+2} - e^{-x})\, dx = \left[e^{x+2} + e^{-x} \right]_{-1}^{0} = e^2 - 2e + 1 \ u^2$$

a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas:

$$y = x^2 + 1 \;;\; y = \frac{2}{x} \;;\; y = x - 1$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



$$\acute{A}rea = \int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 \left[\frac{2}{x} - x + 1\right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[2\ln x - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} + 1 + 2\ln 2 - 2 + 2 - 2\ln 1 + \frac{1}{2} - 1\right] = \frac{5}{6} + 2\ln 2 \; u^2$$

a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \dfrac{9-x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = 1$ y el eje de abscisas.
b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

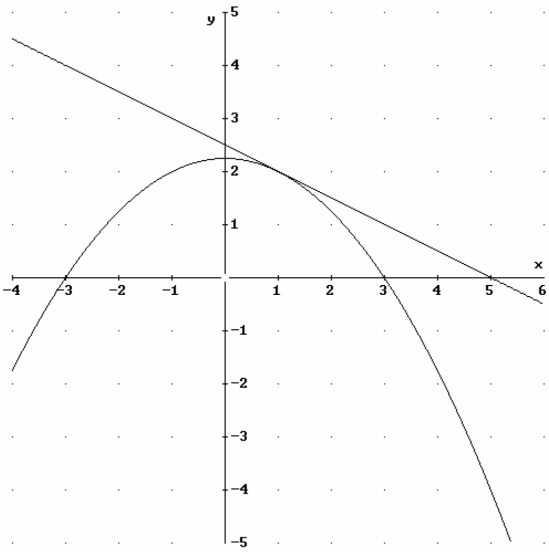
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

- $x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{9-1}{4} = 2$

- $y' = \dfrac{-2x}{4} = -\dfrac{x}{2} \Rightarrow m = y'(x=1) = -\dfrac{1}{2}$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \dfrac{-x+5}{2}$.



b)

$$Área = \int_1^5 \frac{-x+5}{2}\,dx - \int_1^3 \frac{9-x^2}{4}\,dx = \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2}\right]_1^5 - \left[\frac{9x}{4} - \frac{x^3}{12}\right]_1^3 =$$

$$= \left[-\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2}\right] - \left[\frac{27}{4} - \frac{27}{12} - \frac{9}{4} + \frac{1}{12}\right] = \frac{5}{3}\,u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2+x-x^2$. Calcula α, $\alpha<2$, de forma que: $\int_{\alpha}^{2} f(x)\,dx=\frac{9}{2}$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el área encerrada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$.

$$\int_{\alpha}^{2}(2+x-x^2)\,dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{2}=4+2-\frac{8}{3}-2\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}=\frac{9}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{7}{2}\ ;\ \alpha=-1$$

Como $\alpha<2$, el valor pedido es $\alpha=-1$.

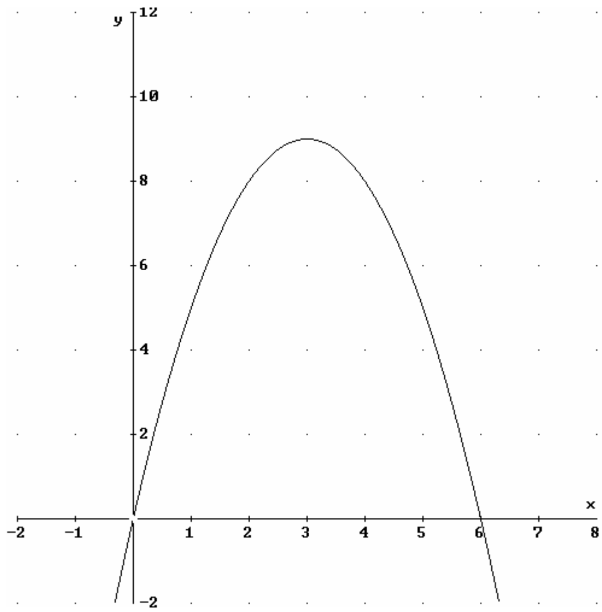
Calcule el valor de α positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\alpha x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = \alpha$$

$$\int_0^{\alpha} (\alpha x - x^2)\, dx = \left[\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{6} = 36 \Rightarrow \alpha = 6$$



Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{3} (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+5;\ \ du = 2x\ dx \\ dv = e^{-x}\ dx;\ v = -e^{-x} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = x;\ \ du = dx \\ dv = e^{-x}\ dx;\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

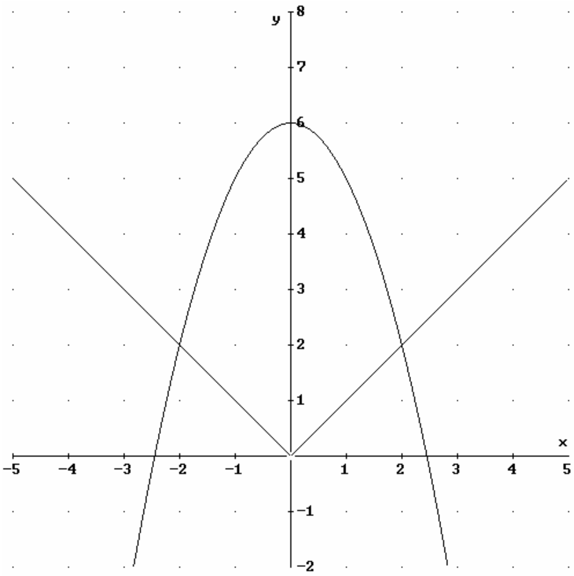
$$I = \int (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx = -(x^2+5)\cdot e^{-x} + 2\int x\cdot e^{-x}\ dx = -(x^2+5)\cdot e^{-x} + 2\left[-x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = -e^{-x}\left(x^2+2x+7\right)$$

$$\int_{-1}^{3} (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx = \left[-e^{-x}\left(x^2+2x+7\right)\right]_{-1}^{3} = \frac{6e^4-22}{e^3}$$

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 6 - x^2$; $g(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$.
a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

- $$A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x)\, dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3}\ u^2$$

Sea $F:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por: $F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\ dt$

a) Determina $F(1)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $F(x)=x^2+\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Rightarrow F(1)=\dfrac{5}{3}$

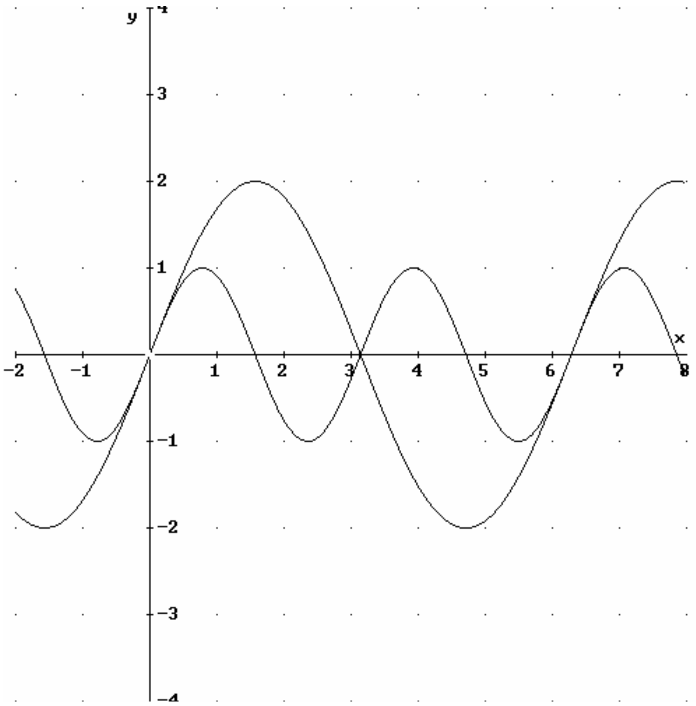
b)

$$\left.\begin{array}{l} x_0=1 \\ F(x_0)=\dfrac{5}{3} \\ F'(x_0)=2x+\sqrt{x}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-F(x_0)=F'(x_0)\cdot(x-x_0) \Rightarrow y-\frac{5}{3}=3\cdot(x-1) \Rightarrow y=\frac{9x-4}{3}$$

Considera las funciones $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2\,sen\,x$ y $g(x) = sen\,2x$
a) Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de *f* y de *g*.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$A = \int_0^{\pi} (2sen\,x - sen\,2x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (sen\,2x - 2senx)dx = 4 + 4 = 8\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(1+x)\cdot e^{x}$

a) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$.

MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la integral $I=\int (1+x)\cdot e^{x}\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1+x;\ du=dx \\ dv=e^{x}\,dx;\ v=e^{x} \end{array}}$$

$$I=\int (1+x)\cdot e^{x}\ dx=(1+x)\cdot e^{x}-\int e^{x}\,dx=(1+x)\cdot e^{x}-e^{x}=x\cdot e^{x}+C$$

b) Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,3)$.

$$3=0+C\Rightarrow C=3$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $I=x\cdot e^{x}+3$

Calcula la siguiente integral definida $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$. ¿Qué representa geométricamente?
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=-1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{2}}{x+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+3)+C$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^2=\frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{2}$$