PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2001

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sea $\mathbf{A=\begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\,x & 0 \\ sen\,x+\cos x & sen\,x-\cos x & 1 \end{pmatrix}}$**.**

¿Para qué valores de *x* existe la matriz inversa de *A*?. Calcula dicha matriz inversa.
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Para que la matriz *A* tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = sen^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$$

Luego, la matriz *A* tiene inversa para cualquier valor de *x*.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} sen\,x & -\cos x & -1 \\ \cos x & sen\,x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} sen\,x & \cos x & 0 \\ -\cos x & sen\,x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} sen\,x & \cos x & 0 \\ -\cos x & sen\,x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

a) Siendo *I* la matriz identidad 3x3 y 0 la matriz nula 3x3, prueba que $A^3 + I = 0$
b) Calcula A^{10}
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{10} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A = (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

De las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el determinante de dichas inversas.

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La matriz B no tiene inversa porque no es cuadrada. La matriz C no tiene inversa porque su determinante vale cero.

$$\left| A^{-1} \right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left| D^{-1} \right| = \frac{1}{|D|} = \frac{1}{1} = 1$$

Se sabe que la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ **verifica que det (*A*) = 1 y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.**
a) Calcula los valores de *a* y *b*.
b) Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1}=A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} |A| = -2ab = 1 \\ (a,0,b)\cdot(-a,0,b) = -a^2+b^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}; b=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ó \quad a=-\frac{\sqrt{2}}{2}; b=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Calculamos

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -b & 0 & b \\ 0 & 2ab & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}^t}{-2ab}=\frac{\begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & 2ab & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}}{-2ab}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2b} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2b} \end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & b \end{pmatrix}$$

Efectivamente, para los valores de a y de b obtenidos en el primer apartado se cumple que:

$$A^{-1}=A^t$$

Determina la matriz *X* tal que $A\cdot X - 3\cdot B = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Sabemos que:

$$A\cdot X = 3\cdot B \Rightarrow X = 3\cdot A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de *A*.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = 3\cdot A^{-1}\cdot B = 3\cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de las matrices: 2·*A*; A^{31} **y** $(A^{31})^{-1}$**.**

b) Halla la matriz A^{-1}**.**

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot (-1) = -8$$

$$|A^{31}| = (-1)^{31} = -1$$

$$|(A^{31})^{-1}| = -1$$

b) Calculamos la matriz inversa de *A*.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \lambda & \mathbf{1} \\ \lambda & \mathbf{1} & \lambda \\ \mathbf{0} & \lambda & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz *A* no tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de *A* para $\lambda = -2$.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A| = 1-\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Luego, la matriz *A* no tiene inversa para $\lambda = \pm 1$.

b) Calculamos la matriz inversa de *A* para $\lambda = -2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$, verifica:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \text{rango } (A) = 2.$$

MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 7 = 9 \\ 2b + 3c = 5 \end{cases}$$

$$\text{rango } (A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a - 3ac + 7b - c = 2$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, obtenemos que: $a = 1$; $b = \frac{23}{29}$; $c = \frac{33}{29}$