PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2001

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el rango de *A* en función del parámetro *a*.
b) Discute en función de *a* el sistema, dado en forma matricial $A \cdot X = B$
c) Resuelve $A \cdot X = B$ en los casos en que sea compatible indeterminado.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{vmatrix} = 4a^2-6a+2=0 \Rightarrow a=1; a=\frac{1}{2}$$

$$a = 1 \text{ y } \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango (A)} = 2$$
$$a \neq 1 \text{ y } \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango (A)} = 3$$

b) Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$a=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a=\frac{1}{2}$	2	3	S. Incompatible
$a\neq 1 \ y \ \frac{1}{2}$	3	3	S. Compatible Determinado

c) $a=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} x-2y-3z=1 \\ y+2z=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-2z \\ z=z \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} mx+y-z=1 \\ x-my+z=4 \\ x+y+mz=m \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores de *m*.
b) ¿Cuál es, según los valores de *m*, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^3 - 3m = 0 \Rightarrow m = 0$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=0$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 0$	3	3	S. Compatible Determinado

b)

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=0$	2	3	Planos secantes dos a dos
$m \neq 0$	3	3	Planos secantes en un punto

Resuelve el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, $A \cdot X = -A \cdot X + B$, siendo:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot X = -A \cdot X + B \Rightarrow 2\,A \cdot X = B \Rightarrow X = \frac{1}{2} A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-5} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-5} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es: $x = -\frac{9}{10} ; y = \frac{4}{10} ; z = \frac{7}{10}$

a) Clasifica el siguiente sistema según los valores del parámetro *m*: $\left.\begin{aligned} \mathbf{2x+my} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x+mz} &= \mathbf{m} \\ \mathbf{x+y+3z} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$

b) Resuelve el sistema para *m* = 6

MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 3m - 2m = m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0; m = 5$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$m = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m = 5$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 0 \ y \ 5$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m = 6 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{aligned} 2x+6y &= 0 \\ x+6z &= 6 \\ x+y+3z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -12 \\ y &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}\right.$$