PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2001

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,0,-1)$, es perpendicular al plano $x-y+2z+1=0$ y es paralelo a la recta $\left\{\begin{array}{r} x-2y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$.

MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

El plano que nos piden viene determinado por el punto $A(1,0,-1)$, el vector director de la recta $(2,1,0)$ y el vector normal del plano $(1,-1,2)$. Por lo tanto, la ecuación del plano pedido será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+4y+3z+5=0$$

Calcula a sabiendo que los planos $ax + y - 7z = -5$ y $x + 2y + a^2 z = 8$ se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0,2,1)$ pero que no pasa por el punto $B(6,-3,2)$.
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la recta pasa por el punto $A(0,2,1)$, este punto debe verificar la ecuación de dicha recta, luego:

$$x + 2y + a^2 z = 8 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 2 + a^2 \cdot 1 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$$

Si $a = 2$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 7z = -5 \\ x + 2y + 4z = \ \ 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 6z - 6 \\ y = 7 - 5z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \ pasa \ \ por \ \ B(6,-3,2)$$

Si $a = -2$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} -2x + y - 7z = -5 \\ x + 2y + 4z = \ \ 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{18 - 18z}{5} \\ y = \dfrac{11 - z}{5} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \ No \ \ pasa \ \ por \ \ B(6,-3,2)$$

Luego, $a = -2$

Considera los puntos: $A(1,0,3); B(3,-1,0); C(0,-1,2)$ *y* $D(a,b,-1)$. Halla a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(2,-1,-3)$; $\vec{CD}=(a,b+1,-3)$, $\vec{AC}=(-1,-1,-1)$; $\vec{AD}=(a-1,b,-4)$.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Por ser perpendiculares} \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{CD}=0 \Rightarrow 2a-b=-8 \\ \textit{Por ser coplanarios} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & a-1 \\ -1 & -1 & b \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2a+5b=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-\frac{27}{4}\ ;\ b=-\frac{11}{2}$$

Considera los planos: $\pi_1 \equiv 2x+5=0$ y $\pi_2 \equiv 3x+3y-4=0$.
a) ¿Qué ángulo determinan ambos planos?.
b) Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1=(2,0,0)$ y $\vec{n}_2=(3,3,0)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \alpha=45^{\circ}$$

b) El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $\vec{n}_1=(2,0,0)$ y $\vec{n}_2=(3,3,0)$, luego, su ecuación será:

omo las rectas r y s son paralelas, sus vectores directores son paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales. Vamos a calcular los vectores directores.

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & 3 \\ y-0 & 0 & 3 \\ z-0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=6z=0\Rightarrow z=0$$

Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+\quad z=0 \end{cases}$.

a) Halla los puntos de r cuya distancia al origen de coordenadas es de 7 unidades.

b) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P=(1,2,-1)$.

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{3}{2}t \\ z=-3t \end{cases}$

Cualquier punto de la recta, tendrá de coordenadas $A=\left(t,-\dfrac{3}{2}t,-3t\right)$. Sabemos que la distancia del punto A al punto $B=(0,0,0)$ tiene que valer 7, luego:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{t^2+\frac{9t^2}{4}+9t^2}=\sqrt{\frac{49t^2}{4}}=\frac{7t}{2}=7 \Rightarrow t=\pm 2$$

Luego, el punto A puede ser: $A=(2,-3,-6)$ ó $A=(-2,3,6)$

b) El plano tiene como vector normal el vector director de la recta $\left(1,-\dfrac{3}{2},-3\right)$, luego, su ecuación será:

$$x-\frac{3}{2}y-3z+D=0$$

y, como debe pasar por el punto $P=(1,2,-1)$, se debe cumplir:

$$1-\frac{3}{2}\cdot 2-3\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=-1$$

Por lo tanto, el plano pedido tendrá de ecuación:

$$x-\frac{3}{2}y-3z-1=0 \Rightarrow 2x-3y-6z-2=0$$

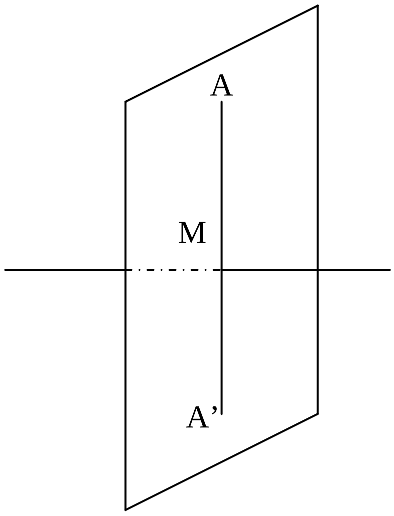
Halla las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-1,1)$ con respecto a la recta

$$\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-2}{3}$$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas $\frac{x-5}{2}=y=\frac{z-2}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=5+2t\\ y=t\\ z=2+3t\end{cases}$.El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = (2,1,3)

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $2x + y + 3z + D = 0$ y como nos interesa el que pasa por el punto $A(0,-1,1)$

$$2\cdot 0 + 1\cdot(-1)+3\cdot 1 + D = 0;\ D = -2$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$2\cdot(5+2t)+t+3\cdot(2+3t)-2=0\Rightarrow t=-1$$

luego las coordenadas del punto M son: $x=5-2=3;\ y=-1;\ z=2+3(-1)=-1$

Como el punto M es el punto medio del segmento $A\,A'$, si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto A', se debe verificar que: $\frac{0+a}{2}=3;\ a=6$; $\frac{-1+b}{2}=-1;\ b=-1$; $\frac{1+c}{2}=-1;\ c=-3$

Luego, el punto simétrico es el $A'(6,-1,-3)$

Halla el punto de la recta $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ que equidista del punto $A(1,2,1)$ y del origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2+2t \\ z = 3-t \end{cases}$. Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $C(t,-2+2t,3-t)$. Como el punto C equidista de $A(1,2,1)$ y de $B(0,0,0)$, se tiene que cumplir que: el módulo de $\vec{AC}(t-1,-4+2t,2-t)$ y el módulo de $\vec{BC}(t,-2+2t,3-t)$ tienen que ser iguales, luego:

$$\sqrt{(t-1)^2+(-4+2t)^2+(2-t)^2} = \sqrt{t^2+(-2+2t)^2+(3-t)^2} \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto es $C(1,0,2)$

Considera el plano $2x + y + 2z - 4 = 0$
a) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.
b) Calcula la distancia del origen al plano dado.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$A(2,0,0) \ ; \ B(0,4,0) \ ; \ C(0,0,2)$$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (-2,4,0)$; $\vec{AC} = (-2,0,2)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \ |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \ \textit{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \ \textit{módulo} \ (8,4,8) = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = 6 \ u^2$$

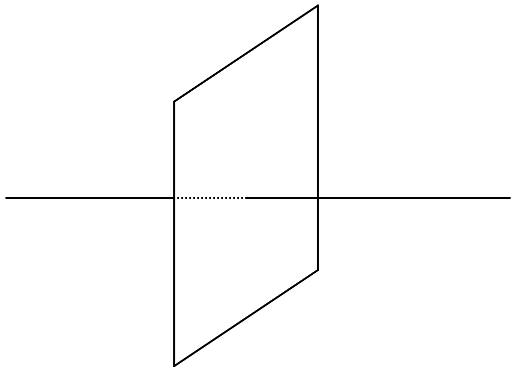
b) Aplicamos la fórmula que da la distancia de un punto a un plano.

$$d(P,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{3} \ u$$

Determina todos los puntos del plano $2x - y + 2z - 1 = 0$ que equidistan de los puntos $A(3,0,-2)$ y $B(1,2,0)$. ¿Qué representan geométricamente?.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el plano mediador del segmento *AB* que es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de *A* y de *B*.



Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera de dicho lugar, entonces, se verifica que: $d\,(P,A) = d\,(P,B)$. Si los puntos son: $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, entonces:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

El plano mediador, es un plano perpendicular al segmento *AB* en su punto medio.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} \Rightarrow x-y-z-2=0$$

Los puntos que queremos averiguar están en la recta intersección del plano mediador con el plano que nos da, es decir:

$$\begin{cases} 2x-y+2z-1=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$$

Considera los tres planos siguientes: $\pi_1 \equiv x+y+z=1$; $\pi_2 \equiv x-y+z=2$; $\pi_3 \equiv 3x+y+3z=5$. ¿Se cortan π_1 y π_2?. ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos un sistema con las ecuaciones de los dos planos y calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R(A)=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=2 \\ R(M)=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=2 \end{array}\right.$$

Luego, los dos planos se cortan según una recta.

b) Formamos un sistema con las ecuaciones de los tres planos y calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+y+3z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} R(A)=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}=2 \\ R(M)=R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}=3 \end{array}\right.$$

Luego, los planos son secantes dos a dos y, por lo tanto, no hay ningún punto que pertenezca a los tres planos.

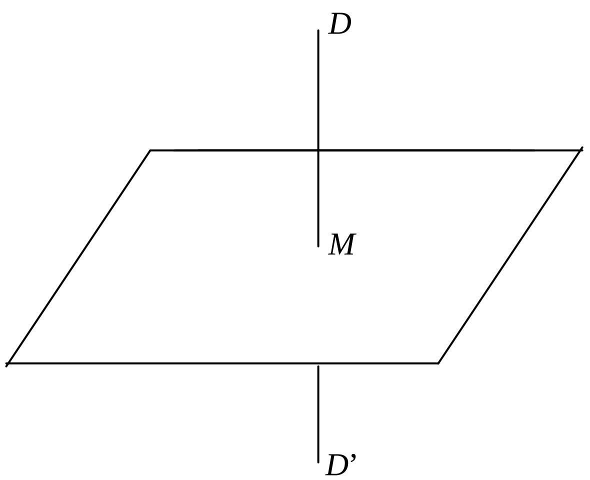
Considera los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,0,2)$. Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a *A*, *B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación del plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*. El plano vendrá definido por el punto *A* y los vectores $\vec{AB}(2,0,-2)$ y $\vec{AC}(1,-2,-1)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-2 & 0 & -2 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = x+z-4=0$$

Calculamos el simétrico del punto $D(0,0,0)$ respecto del plano $x+z-4=0$.



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *D* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = (1,0,1)

La ecuación paramétrica de la recta será: $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{array}\right.$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $t+t-4=0 \Rightarrow t=2$
Luego, las coordenadas del punto *M* son: $x=2; y=0; z=2$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *D D’*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *D'*, se debe verificar que:

$$\frac{a+0}{2}=2; a=4; \ \frac{b+0}{2}=0; b=0; \ \frac{c+0}{2}=2; c=4$$

Luego, el punto simétrico es el $D(4,0,4)$