PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2001

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

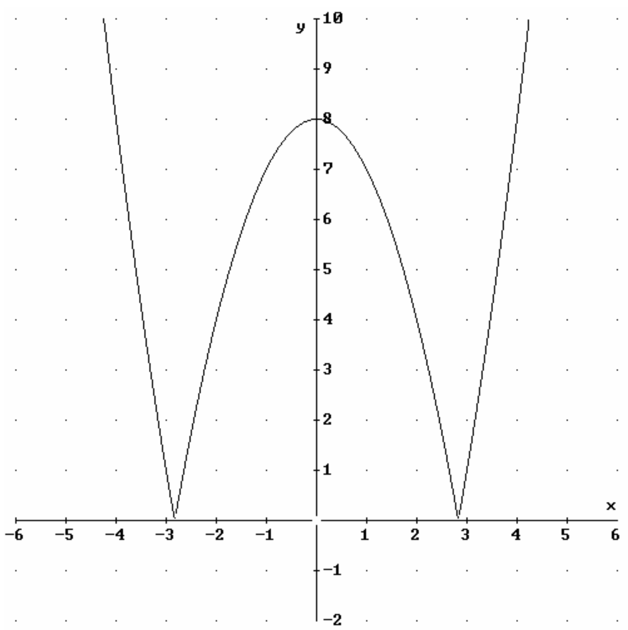
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por: $f(x) = \left| 8 - x^2 \right|$

a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).
b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función.

$$f(x) = \left| 8 - x^2 \right| = \begin{cases} -8 + x^2 & si \quad x \leq -2\sqrt{2} \\ 8 - x^2 & si \quad -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ -8 + x^2 & si \quad x \geq 2\sqrt{2} \end{cases}$$



La función tiene un máximo en $(0,8)$ y dos mínimos (picos) en $(-2\sqrt{2}, 0)$ y $(2\sqrt{2}, 0)$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente.

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Rightarrow y - 4 = 4(x + 2) \Rightarrow y = 4x + 12$$

A continuación calculamos los puntos de corte de la función con la recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} y = -8 + x^2 \\ y = 4x + 12 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x - 20 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{6}$$

Luego los puntos de corte son: $(2 + 2\sqrt{6}, 20 + 8\sqrt{6})$ y $(2 - 2\sqrt{6}, 20 - 8\sqrt{6})$. Además, también, el punto de tangencia $(-2, 4)$.

De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que $f''(x)=x^2+2x+2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$. Halla la expresión de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función que queremos averiguar debe tener de ecuación: $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$f''(x)=12ax^2+6bx+2c=x^2+2x+2 \Rightarrow \begin{cases} 12a=1 \\ 6b=2 \\ 2c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{12} \\ b=\dfrac{1}{3} \\ c=1 \end{cases}$$

Tangente horizontal en $P(1,2) \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 0=\frac{4}{12}+1+2+d \Rightarrow d=-\frac{10}{3}$

Pasa por $P(1,2) \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow 2=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+1-\frac{10}{3}+e \Rightarrow e=\frac{47}{12}$

Luego, la función será: $f(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{10}{3}x+\frac{47}{12}$.

Sea *f* la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

a) Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical es $x = 1$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{4x}{1} = \infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y = 2x + 2$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2 \quad ; \quad n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x}{x-1} \right] = 2$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

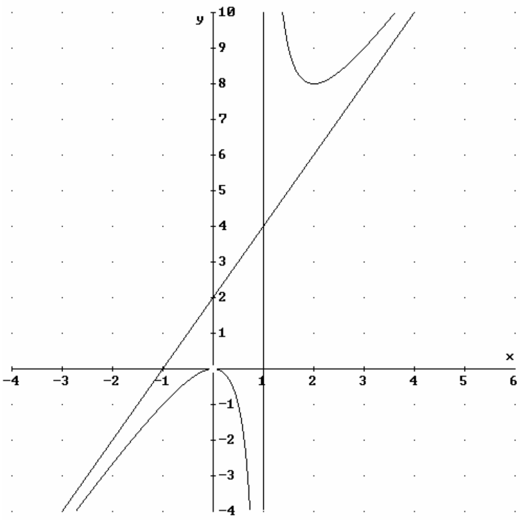
$$y' = \frac{4x\cdot(x-1) - 1\cdot 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $(0,0)$ mínimo $(2,8)$

c)



Calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+(x-1)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\,sen\,x}{x^3-x^2}$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\,sen\,x}{x^3-x^2}=\frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\,sen\,x}{x^3-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\,sen\,x+(e^x-1)\cos x}{3x^2-2x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\,sen\,x+e^x\cos x+e^x\cos x-(e^x-1)senx}{6x-2}=\frac{2}{-2}=-1$$

Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su derivada segunda es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es $5x-y-3=0$.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función que queremos averiguar debe tener de ecuación: $f(x)=ax^2+bx+c$.

A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$f''(x)=2a=3\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

Tangente en $x=1\Rightarrow f'(1)=5\Rightarrow 2a\cdot 1+b=5\Rightarrow b=5-2a=5-2\cdot\frac{3}{2}=2$

Pasa por $P(1,2)\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow 2=\frac{3}{2}\cdot 1^2+2\cdot 1+c\Rightarrow c=-\frac{3}{2}$

Luego, la función será: $f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$

a) Determina el valor de las constantes *a* y *b* sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ ax+b & si \quad x>0 \end{cases}$ **admite recta tangente en el punto $(0,1)$.**

b) ¿Existen constantes *c* y *d* para las cuales la gráfica de la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ cx^2+d & si \quad x>0 \end{cases}$ **admita recta tangente en el punto $(0,1)$?.**

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si admite recta tangente en $(0,1)$, tiene que ser continua y derivable en ese punto.

Como es continua en $x=0$, se cumple: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} b=b \end{array}\right\}\Rightarrow b=1$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & si \quad x<0 \\ a & si \quad x>0 \end{cases}$

Como es derivable en $x=0$, se cumple: $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=a \end{array}\right\}\Rightarrow a=-1$

b) Si admite recta tangente en $(0,1)$, tiene que ser continua y derivable en ese punto.

Si es continua en $x=0$, se cumple: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} d=d \end{array}\right\}\Rightarrow d=1$

Calculamos la función derivada: $g'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & si \quad x<0 \\ 2cx & si \quad x>0 \end{cases}$

Si es derivable en $x=0$, se cumple: $\left.\begin{array}{l} g'(0^-)=-1 \\ g'(0^+)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$ No es posible

Calcula: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ **; b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\cdot e^{-3x}$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

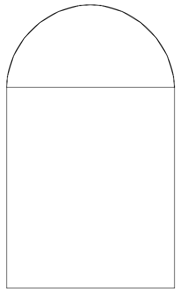
a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\cdot e^{-3x}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Determina las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2.



MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $P_{\min} = 2r + 2y + \pi r = 2y + (\pi + 2) \cdot r$

b) Relación entre las variables: $2 = 2r\,y + \dfrac{\pi r^2}{2} \Rightarrow y = \dfrac{4 - \pi r^2}{4r}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = 2y + (\pi + 2) \cdot r = 2\frac{4 - \pi r^2}{4r} + (\pi + 2) \cdot r = \frac{4 - \pi r^2}{2r} + (\pi + 2) \cdot r = \frac{\pi r^2 + 4r^2 + 4}{2r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = \frac{(2\pi r + 8r) \cdot 2r - 2(\pi r^2 + 4r^2 + 4)}{4r^2} = \frac{2\pi r^2 + 8r^2 - 8}{4r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{8}{8 + 2\pi}} = 0'748\ cm\ ;\ y = 0'749\ cm$$

Un hilo de alambre de 1 m. De longitud se corta en dos trozos formando con uno de ellos una circunferencia y con el otro un cuadrado. Prueba que la suma de las áreas es mínima cuando el lado del cuadrado es el doble que el radio de la circunferencia.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = \dfrac{x^2}{16} + \pi \dfrac{(1-x)^2}{4\pi^2} = \dfrac{\pi x^2 + 4 + 4x^2 - 8x}{16\pi}$

b) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = \frac{2\pi x + 8x - 8}{16\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{4+\pi}$$

Lado del cuadrado $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{4+\pi}$

Radio de la circunferencia $\dfrac{1-x}{2\pi} = \dfrac{1 - \dfrac{4}{4+\pi}}{2\pi} = \dfrac{1}{8+2\pi}$

Luego, el lado del cuadrado es el doble del radio de la circunferencia

Considera la función $f:[0,3]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=3x-2$. Calcula el punto de la gráfica de *f* más cercano al punto $(2,6)$ y calcula también el más alejado.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la función tendrá de coordenadas $(x,3x-2)$. La distancia entre este punto y el que nos dan vendrá dada por el módulo del vector que une esos dos puntos.

a) La función que queremos que sea mínimo es: $D_{\min}=\sqrt{(2-x)^2+(8-3x)^2}=\sqrt{10x^2-52x+68}$

b) Derivamos e igualamos a cero

$$D'=\frac{20x-52}{2\sqrt{10x^2-52x+68}}=0\Rightarrow x=\frac{52}{20}=\frac{13}{5}$$

Luego, el punto que está a mínima distancia será: $\left(\frac{13}{5},\frac{29}{5}\right)$

El punto que está a mayor distancia será uno de los dos extremos del intervalo es decir, el punto $(0,-2)$ ó el punto $(3,7)$. Vamos a calcularlo.

Distancia entre los puntos $(0,-2)$ y $(2,6)$

$$D=\sqrt{(0-2)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$$

Distancia entre los puntos $(3,7)$ y $(2,6)$

$$D=\sqrt{(3-2)^2+(7-6)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Luego, el punto que está a mayor distancia es el $(0,-2)$

Considera la función $f:(-\infty,10)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} a^x-6 & si \;\; x<2 \\ |\,x-5\,| & si \;\; 2\le x<10 \end{cases}$

a) Determina el valor de *a* sabiendo que *f* es continua (y que $a>0$).
b) Esboza la gráfica de *f*.
c) Estudia la derivabilidad de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

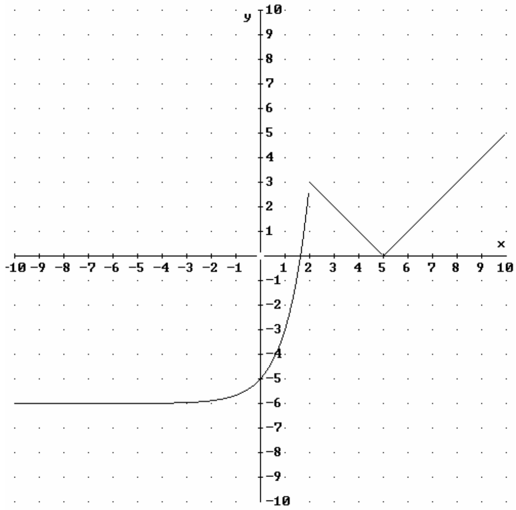
a) Lo primero que hacemos es abrir la función: $f(x)=\begin{cases} a^x-6 & si \;\; x<2 \\ -x+5 & si \;\; 2\le x\le 5 \\ x-5 & si \;\; 5<x<10 \end{cases}$

Vamos a estudiar primero la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} a^x-6=a^2-6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} -x+5=3 \end{array}\right\}\Rightarrow a^2-6=3\Rightarrow a=\pm 3$$

Como $a>0$, entonces, $a=3$.

b) Hacemos la gráfica de *f*.



c) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3^x\ln 3 & si \;\; x<2 \\ -1 & si \;\; 2<x<5 \\ 1 & si \;\; 5<x<10 \end{cases}$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=2$ y en $x=5$

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=9\ln 3 \\ f'(2^+)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow$ No es derivable en $x=2$; $\left.\begin{array}{l} f'(5^-)=-1 \\ f'(5^+)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$ No es derivable en $x=5$

Luego, la función es derivable $\mathbb{R}-\{2,5\}$.

Determina α sabiendo que existe y es finito el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - sen\, x}$. Calcula dicho límite.

MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} + \alpha}{1 - \cos x} = \frac{2+\alpha}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} + \alpha x}{x - sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} + \alpha}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$