PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2002

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFÍN Y EUCLÍDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta *s* con el plano. Para ello, pasamos la recta a paramétricas y la sustituimos en el plano.

$$s \equiv \frac{x}{3}=y-2=z+1 \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=2+t \\ z=-1+t \end{cases}$$

$$3t+2+t+1-t+6=0 \Rightarrow t=-3$$

Luego el punto de corte es: $A(-9,-1,-4)$.

Calculamos el vector director de la recta *r*: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,-13)$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x+9}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+4}{-13}$

Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,1,2)$; $B(1,0,-1)$; $C(1,-3,2)$.
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los vectores: $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-3)$; $\overrightarrow{AC}=(0,-4,0)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -4 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\ (-12,0,0)=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+0^2+0^2}=6\ u^2$$

Considera los puntos $A(1,-3,2)$, $B(1,1,2)$ y $C(1,1,-1)$.
a) ¿Pueden ser *A*, *B* y *C* vértices consecutivos de un rectángulo?. Justifica la respuesta.
b) Halla, si es posible las coordenadas de un punto *D* para que el paralelogramo *ABCD* sea un rectángulo.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$ y $\overrightarrow{BC}=(0,0,3)$. Si forman un rectángulo, su producto escalar debe valer cero.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \text{Si pueden ser los vértices consecutivos de un rectángulo.}$$

b) La recta que pasa por *A* y es paralela al lado *BC* es: $r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2+3t \end{cases}$

La recta que pasa por *C* y es paralela al lado *AB* es: $s\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=1+4s \\ z=-1 \end{cases}$

El punto de corte de estas dos rectas será el vértice *D*, luego: $D=(1,-3,-1)$

Considera los puntos $A(1,1,1); B(2,2,2); C(1,1,0)$ y $D(1,0,0)$.
a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos *A* y *B* y no corta a la recta determinada por *C* y *D*.
b) Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por $A=(1,1,1)$; $\vec{AB}=(1,1,1)$; $\vec{CD}=(0,-1,0)$, luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x-z=0$$

b) Calculamos los puntos medios: $\frac{A+B}{2}=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $\frac{C+D}{2}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

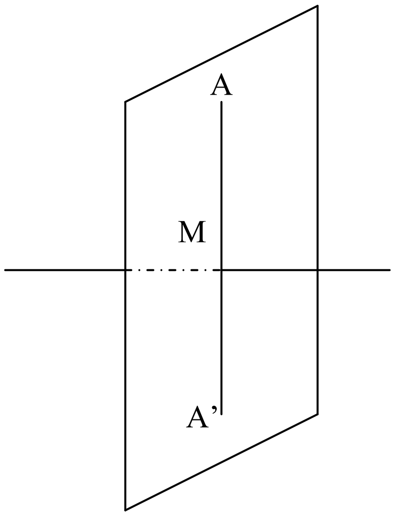
La ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es: $\dfrac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-1}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}$

Considera los puntos $A(1,-1,2)$, $B(1,3,0)$ y $C(0,0,1)$. Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la recta que pasa por B y C: $r \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3-3t \\ z = t \end{cases}$

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(-1,-3,1)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-x-3y+z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $A(1,-1,2)$

$$-(1)-3\cdot(-1)+2+D=0 \Rightarrow D=-4 \Rightarrow -x-3y+z-4=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $-(1-t)-3(3-3t)+t-4=0 \Rightarrow t=\frac{14}{11}$

luego las coordenadas del punto M son: $x=1-\frac{14}{11}=-\frac{3}{11}; y=3-\frac{42}{11}=-\frac{9}{11}; z=\frac{14}{11}$

Como el punto M es el punto medio del segmento $A A'$, si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto A', se debe verificar que: $\frac{1+a}{2}=-\frac{3}{11}; a=-\frac{17}{11}$; $\frac{-1+b}{2}=-\frac{9}{11}; b=-\frac{7}{11}$; $\frac{2+c}{2}=\frac{14}{11}; c=\frac{6}{11}$

Luego, el punto simétrico es: $\left(-\frac{17}{11},-\frac{7}{11},\frac{6}{11}\right)$.

Sea π el plano de ecuación $3x-y+2z-4=0$
a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto P(1,−2,2).
b) Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-4z=1 \end{cases}$
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de todos los planos paralelos a π es: $3x-y+2z-D=0$. El que pasa por el punto $P=(1,-2,2)$, será: $3\cdot 1-(-2)+2\cdot 2-D=0 \Rightarrow D=9 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x-y+2z-9=0$.

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta *r* es:

$$x-y+z-1+k(2x+y-4z-1)=0 \Rightarrow (1+2k)x+(-1+k)y+(1-4k)z-1-k=0$$

Como que remos que sea perpendicular a π y π_1, Sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

$$(1+2k)\cdot 3+(-1+k)\cdot(-1)+(1-4k)\cdot 2=0 \Rightarrow k=2 \Rightarrow \pi_2 \equiv 5x+y-7z-3=0$$

Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z = \ \ 1 \\ \quad\ \ y+z=-1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1,-1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x+3y+z = \ \ 1 \\ \quad\ \ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4+2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow A(4,-1,0)$; $\vec{u}(2,-1,1)$

Cualquier punto de la recta *r*, tendrá de componentes $B(4+2t,-1-t,t)$. El vector $\vec{PB}(3+2t,-t,t)$ tiene que ser perpendicular al vector $\vec{u}(2,-1,1)$, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{PB}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow 2\cdot(3+2t)-1\cdot(-t)+1\cdot(t)=0 \Rightarrow t=-1$$

Luego, el punto que nos piden es: $B(2,0,-1)$

Sustituyendo, nos queda que $\overrightarrow{AB}=(-2,4,4)$ y la recta que nos piden es: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-1}{4}$

Considera la recta r y el plano π siguientes: $r \equiv \begin{cases} x+z-a=0 \\ y-az-1=0 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x-y=b$

a) Determina a y b sabiendo que r está contenida en π.
b) Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos un sistema de ecuaciones con las tres ecuaciones.

$$\begin{cases} x+z-a=0 \\ y-az-1=0 \\ 2x-y=b \end{cases}$$

Para que la recta esté contenida en el plano el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada deben valer 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2-a=0 \Rightarrow a=-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = b+5=0 \Rightarrow b=-5$$

b) Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r.

$$x+z-a+k(y-az-1)=0 \Rightarrow x+ky+(1-ak)z-a-k=0$$

Como tiene que ser perpendicular al plano π, sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, luego:

$$2\cdot 1-1\cdot k+0\cdot(1-ak)=0 \Rightarrow k=2$$

Por lo tanto, el plano que nos piden tiene de ecuación: $x+2y+(1-2a)z-a-2=0$

Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x - y + z = 7$ y cuyo punto más cercano al origen es $(1,2,3)$.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Supongamos que el vector director de la recta que buscamos $\vec{u} = (a,b,c)$.

El vector que une el origen con el punto $(1,2,3)$, tiene que ser perpendicular al vector $\vec{u} = (a,b,c)$, luego:

$$(1,2,3)\cdot(a,b,c) = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0$$

El vector normal del plano y el vector $\vec{u} = (a,b,c)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$(1,-1,1)\cdot(a,b,c) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} a + 2b + 3c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5c}{3} \\ b = -\dfrac{2c}{3} \\ c = c \end{cases}$$

Si damos a c el valor 3, el vector que buscamos será el $\vec{u} = (-5,-2,3)$. La recta pedida tendrá de ecuación: $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$

Sabiendo que las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$ **se cortan, determina** a **y el punto de corte.**
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Formamos un sistema de ecuaciones con las dos rectas.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \\ x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$$

Para que las dos rectas se corten el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe ser 3, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2a \end{vmatrix} = 7a-19=0 \Rightarrow a=\frac{19}{7}$$

Resolviendo el sistema sale que el punto de corte es: $\left(\frac{10}{7},-\frac{4}{7},-\frac{1}{7}\right)$

Los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,0,-2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.
a) Calcula el área del cuadrado.
b) Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos *A* y *B* que pasa por su punto medio.
MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la diagonal que será el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(-2,0,-4)$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+0+16}=\sqrt{20}$$

Aplicando Pitágoras, tenemos que:

$$20=l^2+l^2 \Rightarrow Área=l^2=10\ u^2$$

b) El punto medio tendrá de coordenadas: $\dfrac{A+B}{2}=(0,0,0)$ y como el vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}=(-2,0,-4)$, tenemos que:

$$-2x-4z+D=0 \Rightarrow 0-0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow x+2z=0$$

Luego el plano pedido tiene de ecuación: $x+2z=0$

Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto $A(-1,-4,2)$.
a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.
b) Halla el punto simétrico de A respecto de π.
MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por $A(-1,-4,2)$ y su vector director es el vector normal del plano, luego, su ecuación será: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$

b) Pasamos la recta a paramétricas

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+t \\ y = -4-t \\ z = 2+2t \end{cases}$$

y calculamos el punto de corte con el plano.

$$-1+t-(-4-t)+2(2+2t) = 3 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Luego, el punto de corte tiene de coordenadas:

$$M\left(-1-\frac{2}{3}, -4+\frac{2}{3}, 2-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico, serán:

$$\frac{-1+a}{2} = -\frac{5}{3}; a = -\frac{7}{3};\ \frac{-4+b}{2} = -\frac{10}{3}; b = -\frac{8}{3};\ \frac{2+c}{2} = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3}$$

El punto pedido es $A' = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$