PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2003

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada *A* de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
a) El determinante de A^3.
b) El determinante de A^{-1}.
c) El determinante de 2 *A*.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$; $2C_3$ y C_2.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que $\left| A^3 \right| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \left| A \cdot A^{-1} \right| = |A| \cdot \left| A^{-1} \right| = |I| = 1 \Rightarrow \left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $\left| A^{-1} \right| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{5}$

c) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40$

d)

$$\left| 3C_1 - C_3 \quad 2C_3 \quad C_2 \right| = \left| 3C_1 \quad 2C_3 \quad C_2 \right| - \left| C_3 \quad 2C_3 \quad C_2 \right| = 6 \cdot \left| C_1 \quad C_3 \quad C_2 \right| - 2 \left| C_3 \quad C_3 \quad C_2 \right| =$$

$$= -6 \cdot \left| C_1 \quad C_2 \quad C_3 \right| - 2 \cdot 0 = -6 \cdot 5 = -30$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: ”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo” y “Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0”.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ **halla la matriz** X **que cumple que** $A\cdot X=(B\cdot A^t)^t$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si vamos operando y aplicando las propiedades de las matrices, tenemos:

$$A\cdot X=(B\cdot A^t)^t \Rightarrow A\cdot X=(A^t)^t\cdot B^t \Rightarrow A\cdot X=A\cdot B^t \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot A\cdot B^t \Rightarrow X=B^t$$

Luego la matriz X será: $X=\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, se pide:**

a) Determina los valores de *m* para los que la matriz *A* tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de *A* para *m* = 2.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *A* tendrá inversa para aquellos valores de *m* que no anulen el determinante de *A*. Vamos a calcular el determinante de *A* e igualarlo a cero.

$$|A| = 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 .$$

Luego admite inversa para todos los valores de $m \neq \pm 1$.

b) Vamos a calcular la matriz inversa de *A* para *m* = 2.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada *A* de orden 3 vale −2. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz 4 *A* ?.

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$**,¿ para qué valores de λ la matriz 3 *B* + B^2 no tiene inversa?.**

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|4A| = (4)^3 \cdot |A| = (64) \cdot (-2) = -128$

b) Vamos a calcular primero la matriz 3 *B* + B^2

$$3 \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & -2 \\ \lambda & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda+4 & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación calculamos el determinante de dicha matriz y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} 2\lambda+4 & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8\lambda^2 + 34\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \ \text{ó} \ \frac{1}{4}$$

Luego no tiene inversa para $\lambda = 4 \ y \ \frac{1}{4}$

Considera la matriz $M(x)=\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde x es un número real.

a) ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$?. Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.

b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3)\cdot M(x)=M(5)$

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de $M(x)$.

$|M(x)|=2^x=0 \Rightarrow$ No tiene solución. Luego tiene inversa para todos los valores de x.

Calculamos la matriz inversa de A para $\lambda=-2$.

$$(M(x))^{-1}=\frac{(M(x)^d)^t}{|M(x)|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & -x\cdot 2^x & 2^x \end{pmatrix}^t}{2^x}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & -x\cdot 2^x \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}}{2^x}=\begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2^{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow x=2$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ***y*** $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de *m* tiene solución la ecuación matricial *A·X*+2*B* = 3*C*?
b) Resuelve la ecuación matricial dada para *m* = 1.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que la ecuación matricial tenga solución, la matriz *A* debe de tener matriz inversa, luego su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&m&0\\1&1&1\end{vmatrix}=m\Rightarrow m\neq 0\Rightarrow \text{tiene inversa y tiene solución la ecuación matricial.}$$

b) $A\cdot X+2B=3C\Rightarrow A\cdot X=3C-2B\Rightarrow A^{-1}A\cdot X=A^{-1}(3C-2B)\Rightarrow X=A^{-1}(3C-2B)$

Vamos a calcular la matriz inversa de *A* para *m* = 1

$$A^{-1}=\frac{\left(A^d\right)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Como $X=A^{-1}(3C-2B)$, vamos sustituyendo y operando:

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&3&0\\3&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-5&5&2\\5&-3&3\end{pmatrix}$$