PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2003

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{m} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-m} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de *m* existe A^{-1} ?.
b) Siendo *m* = 2, calcula A^{-1} y resuelve el sistema $A \cdot X = B$.
c) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para *m* = 1.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 \ ; \ m = 3$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1 \ y \ 3$

b) Calculamos la matriz inversa para *m* = 2.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es: $x = 0; y = 1; z = -1$

c) Resolvemos el sistema $\left.\begin{matrix} x - z = \ \ 1 \\ y + 3z = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 - 3z \\ z = z \end{cases}$

Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, *A*, *B* y *C*. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 €, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 € y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala *A* hubieran asistido a la sala *B* y los de la sala *B* a la sala *A*, se hubiese obtenido una recaudación de 20 € más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Llamamos x = espectadores de la sala *A*.
y = espectadores de la sala *B*.
z = espectadores de la sala *C*.

Leyendo el enunciado del problema podemos plantear un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y+5z &= 720 \\ x+y+z &= 200 \\ 4x+3y+5z &= 740 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=100 \ ; \ y=80 \ ; \ z=20$$

Determina razonadamente los valores de *m* para los que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+\ \ z=mx \\ x+2y+\ \ z=my \\ x+2y+4z=mz \end{array}\right\}$$

tiene más de una solución.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es ordenar el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+\ \ z=mx \\ x+2y+\ \ z=my \\ x+2y+4z=mz \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-m)x+y+z=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+2y+(4-m)z=0 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = -m^3+8m^2-16m+9=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$$

Luego, el sistema homogéneo tiene más de una solución si $m=1$ *ó* $m=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

$$\text{Considera el sistema de ecuaciones: } \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x+my-z=-2+2my} \\ \boldsymbol{mx-y+4z=5+2z} \\ \boldsymbol{6x-10y-z=-1} \end{array}\right\}$$

a) Discute las soluciones del sistema según los valores de *m*.
b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es ordenar el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+my-z=-2+2my \\ mx-y+4z=\quad 5+2z \\ 6x-10y-z=\quad -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-my-z=-2 \\ mx-y+2z=\quad 5 \\ 6x-10y-z=-1 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = -m^2+2m-15=0 \Rightarrow m=3 \;\; ; \;\; m=-5$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$m=-5$	2	3	S.I.
$m=3$	2	2	S.C.I.
$b\neq 3 \;\; y \; -5$	3	3	S.C.D.

b) Resolvemos el sistema para $m=3$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-2 \\ 3x-y+2z=\quad 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=-2+z \\ 3x-y=\; 5-2z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17-7z}{8} \\ y=\dfrac{11-5z}{8} \\ z=z \end{cases}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ **y** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa.

b) Resuelve el sistema $A\cdot X = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A+\lambda I$.

$$A+\lambda I = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante vale:

$$|A+\lambda I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $\lambda \neq \pm 3$

b) Resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{r} -5x-2y+z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \\ x-2y-5z=0 \end{array}\right\}$

Es un sistema homogéneo cuya solución es: $x = z; y = -2z; z = z$ y solución trivial