PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2003

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFÍN Y EUCLÍDEO

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,2,a)$ y $\vec{w}=(2,0,0)$.

a) Halla los valores de *a* para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

b) Determina los valores de *a* para los que los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{w}$ son ortogonales.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a-4=0 \Rightarrow a=2$$

Luego, son independientes para todos los valores de $a \neq 2$.

b) Calculamos los vectores: $\vec{u}+\vec{v}=(3,3,1+a)$ y $\vec{u}-\vec{w}=(-1,1,1)$. Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(3,3,1+a)\cdot(-1,1,1)=-3+3+1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

Sabiendo que las rectas: $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 3+\mu \\ z = -\mu \end{cases}$ se cruzan, halla los puntos *A* y *B*, de *r* y *s* respectivamente, que están a mínima distancia.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1+s \\ y = 3+s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1+s, 3+s, -s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1+s-t, 3+s-t, -s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 1+s-t+3+s-t-s-t = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1+s-t+3+s-t+s+t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 1$; $s = -1$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1,1,1) \ ; \ B = (0,2,1)$$

Determina el punto P de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x+y+z+3=0 \quad y \quad \pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La ecuación general de π_2 será: $\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y+z+9=0$

Si escribimos la recta r en paramétricas: $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3t \end{cases}$, entonces cualquier punto P de esa recta tendrá de coordenadas $P(1+2t,-1+t,3t)$.

Se tiene que cumplir que distancia de P a π_1 tiene que ser igual a la distancia de P a π_2, luego:

$$\frac{1+2t-1+t+3t+3}{\sqrt{3}}=\pm\frac{1+2t-1+t+3t+9}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{6t+3}{\sqrt{3}}=\frac{6t+9}{\sqrt{3}} \quad ó \quad \frac{6t+3}{\sqrt{3}}=-\frac{6t+9}{\sqrt{3}} \Rightarrow t=-1$$

Luego, $P(-1,-2,-3)$

Considera el plano $\pi \equiv x-2y+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+az+2=0 \end{cases}$

a) Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano.

b) Calcula el ángulo formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta está contenida en el plano, el rango de la matriz de los coeficientes del sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano debe valer 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3a-2+2a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

b) Pasamos la recta a paramétricas

$$s \equiv \begin{cases} x-3y+z=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo de recta y plano.

$$sen\,\alpha = \frac{|u_1 \cdot A + u_2 \cdot B + u_3 \cdot C|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0'3162 \Rightarrow \alpha = 18'43^{\circ}$$

Considera el punto $P(-2,3,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-2y+z+1=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a la recta *r*.
b) Determina el punto de *r* más próximo a *P*.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación del haz de planos es: $x+y+z+2+k(2x-2y+z+1)=0$.

Como queremos el plano que pasa por $P(-2,3,0)$, tenemos que:

$$-2+3+2+k(2\cdot(-2)-2\cdot 3+1)=0 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

luego, el plano es: $x+y+z+2+\frac{1}{3}(2x-2y+z+1)=0 \Rightarrow 5x+y+4z+7=0$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-2y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5-3t}{4} \\ y=\dfrac{-3-t}{4} \\ z=t \end{cases}$

Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},1\right)=(-3,-1,4)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-3x-y+4z+D=0$

Como nos interesa el que pasa por el punto $P(-2,3,0)$

$$-3\cdot(-2)-3+D=0 \Rightarrow D=-3$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$-3x-y+4z-3=0 \Rightarrow -3\left(\frac{-5-3t}{4}\right)-\left(\frac{-3-t}{4}\right)+4t-3=0 \Rightarrow t=-\frac{3}{13}$$

luego las coordenadas del punto *M* son: $x=\dfrac{-5-3\cdot\left(\frac{-3}{13}\right)}{4}=-\dfrac{14}{13}$; $y=\dfrac{-3-\left(\frac{-3}{13}\right)}{4}=-\dfrac{9}{13}$; $z=-\dfrac{3}{13}$

Considera una recta r y un plano π cuyas ecuaciones son, respectivamente;

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad (t \in R) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right\} \quad (\alpha, \beta \in R)$$

a) Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Dados los puntos $B(4,4,4)$ y $C(0,0,0)$, halla un punto A en la recta r de manera que el triángulo formado por los puntos A, B y C sea rectángulo en B.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \Rightarrow A = (0,0,0) \; ; \; \vec{u} = (1,1,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \Rightarrow B = (0,0,0) \; ; \; \vec{v} = (1,1,0) \; ; \; \vec{w} = (0,0,1) \\ z = \beta \end{cases}$$

Vemos que la recta está contenida en el plano, ya que el punto A pertenece al plano y el rango de $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 2$

b) Cualquier punto A de la recta r tendrá de coordenadas: $A = (t, t, 0)$. Como el triángulo debe ser rectángulo en B, los vectores $\vec{BA} = (4-t, 4-t, 4)$ y $\vec{BC} = (4,4,4)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar debe valer 0.

$$(4-t, 4-t, 4) \cdot (4,4,4) = 16 - 4t + 16 - 4t + 16 = 0 \Rightarrow t = 6$$

Luego, el punto A será: $A = (6,6,0)$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,1,-1)$, es paralela al plano $3x-y+z=4$ y corta a la recta intersección de los planos $x+z=4$ y $x-2y+z=1$.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las coordenadas de un punto de la recta de corte de los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l} x+z=4 \\ x-2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow B=(4-t,\frac{3}{2},t)$$

El vector $\vec{AB}=(1-t,\frac{1}{2},t+1)$, tiene que ser perpendicular al vector normal del plano, luego su producto escalar debe valer 0.

$$3\cdot(1-t)+(-1)\cdot\frac{1}{2}+1\cdot(t+1)=0 \Rightarrow t=\frac{7}{4}$$

Luego, $\vec{AB}=\left(1-\frac{7}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{4}+1\right)=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right)=(-3,2,11)$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es: $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{11}$

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ y=2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-2y+z=0$.

a) Calcula el haz de planos que contiene a la recta *r*.

b) Halla el plano que contiene a la recta *r* y corta al plano π en una recta paralela al plano $z=0$.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación del haz de planos que contiene a la recta *r* es:

$$x+y-z-1+k(y-2)=0 \Rightarrow x+(1+k)y-z-1-2k=0$$

b) El vector director de la recta intersección de los planos: $x+(1+k)y-z-1-2k=0$ y $x-2y+z=0$ tiene que ser perpendicular al vector normal del plano z = 0.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1+k & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+k,-2,-3-k)$$

$$(-1+k,-2,-3-k)\cdot(0,0,1)=0 \Rightarrow k=-3$$

Luego, el plano pedido es: $x+(1-3)y-z-1-2\cdot(-3)=0 \Rightarrow x-2y-z+5=0$

Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos *A*, *B* y *C*, siendo las longitudes de los segmentos *OA*, *OB* y *OC* de 4 unidades, donde *O* es el origen de coordenadas.
a) Halla la ecuación del plano π.
b) Calcula el área del triángulo *ABC*.
c) Obtén un plano paralelo al plano π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los puntos serán: $A=(4,0,0)$; $B=(0,4,0)$ y $C=(0,0,4)$.

El plano viene definido por el punto $A=(4,0,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}=(-4,4,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,0,4)$. Luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-4 & -4 & -4 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y+z-4=0 .$$

b) Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-4,4,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,0,4)$ y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(16,16,16)$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+16^2} = \sqrt{192} = 13'85\ u^2$$

c) Cualquier plano paralelo a π tendrá de ecuación: $x+y+z+D=0$ y como dista 4 unidades del origen de coordenadas, tenemos:

$$4=\frac{|D|}{\sqrt{3}} \Rightarrow D=\pm 4\sqrt{3}$$

Luego, el plano pedido tendrá de ecuación: $x+y+z\pm 4\sqrt{3}=0$

Halla la perpendicular común a las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2+2\beta \\ z = 0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (1+\alpha, \alpha, -\alpha)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (\beta, 2+2\beta, 0)$.

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (\beta - 1 - \alpha, 2+2\beta - \alpha, \alpha)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \beta - 1 - \alpha + 2 + 2\beta - \alpha - \alpha = 0 \Rightarrow -3\alpha + 3\beta + 1 = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \beta - 1 - \alpha + 4 + 4\beta - 2\alpha = 0 \Rightarrow -3\alpha + 5\beta + 3 = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $\alpha = -\frac{2}{3}$ y $\beta = -1$.

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto $A = (1, 0, 0)$ y su vector director es el $\vec{AB} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (-2, 1, -1)$

La perpendicular común tiene de ecuación: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

Se sabe que los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo *ABCD*.
a) Calcula las coordenadas de *D*.
b) Halla el área del paralelogramo.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal *AC* es: $M=\left(\frac{1-7}{2},\frac{0+1}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=\left(-3,\frac{1}{2},2\right)$

El punto medio de la diagonal *BD*, también es *M*, luego si llamamos $D(a,b,c)$, se tiene que cumplir:

$$M=\left(\frac{3+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(-3,\frac{1}{2},2\right)\Rightarrow D(-9,-1,3)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(2,2,2)$ y $\vec{AD}=(-10,-1,4)$.

$$\begin{vmatrix} x-4 & -4 & -4 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow x+y+z-4=0.$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-4,4,0)$ y $\vec{AC}=(-4,0,4)$ y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix}=(10,-28,18)$$

$$\boldsymbol{S}=|\vec{AB}\wedge\vec{AD}|=\sqrt{10^2+28^2+18^2}=\sqrt{1208}=34'75\ u^2$$

Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo *ABCD*. Además, se sabe que los vértices *C* y *D* están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla *C* y *D*.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por *C* y *D*.

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$$

Con el punto $A(1,1,0)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x+y+z+D=0\Rightarrow 1+1+D=0\Rightarrow D=-2\Rightarrow x+y+z-2=0$$

Las coordenadas del punto *D*, son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x+y+z-2=0\Rightarrow t+t+t-2=0\Rightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow D=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Con el punto $B(2,2,1)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x+y+z+D=0\Rightarrow 2+2+1+D=0\Rightarrow D=-5\Rightarrow x+y+z-5=0$$

Las coordenadas del punto *C* son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x+y+z-5=0\Rightarrow t+t+t-5=0\Rightarrow t=\frac{5}{3}\Rightarrow C=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$$