

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Sean los puntos A (1,2,1); B (2,3,1); C (0,5,3) y D (-1,4,3)

a) Prueba que los 4 puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano.

b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo.

c) Calcula el área de dicho rectángulo.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  y  $\vec{AD}$  tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son:  $\vec{AB} = (1,1,0)$ ;  $\vec{AC} = (-1,3,2)$  y  $\vec{AD} = (-2,2,2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los 4 puntos están en un mismo plano.}$$

La ecuación del plano es:  $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0$

b) Si los cuatro puntos forman un rectángulo

D

C



A

B

Los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AD}$  tienen que ser perpendiculares  $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$  Cierto

Los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{BC}$  tienen que ser perpendiculares  $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$  Cierto

Los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{DC}$  tienen que tener el mismo módulo  $\Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{DC}| = \sqrt{2} \Rightarrow$  Cierto

Luego forman un rectángulo.

c) Área =  $|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{6} u^2$

Dados los vectores  $\vec{u} = (2, 1, 0)$  y  $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ , halla un vector unitario  $\vec{w}$  que sea coplanario con  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y ortogonal a  $\vec{v}$ .

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Llamamos  $\vec{w} = (a, b, c)$  y vamos aplicando las condiciones del problema.

1.  $\vec{w}$  unitario  $\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

2.  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  coplanarios  $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a + c - 2b = 0$

3.  $\vec{w}$  ortogonal a  $\vec{v} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -a + c = 0$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + c - 2b = 0 \\ -a + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Luego el vector  $\vec{w}$  será:  $\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

Considera las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

Halla la ecuación de una recta que corte a  $r$  y  $s$  y sea perpendicular al plano  $z = 0$ .  
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A = (t, t, 2)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B = (1 - s, s, 3)$ .

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (1 - s - t, s - t, 1)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular al plano  $z = 0$ , este vector y el vector  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  tienen que ser paralelos, luego:

$$\frac{1 - s - t}{0} = \frac{s - t}{0} = \frac{1}{1} \Rightarrow s = \frac{1}{2} ; t = \frac{1}{2}$$

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$  y su vector director es el  $\vec{AB} = (1, 1, 1)$

La recta tiene de ecuación:  $\frac{x - \frac{1}{2}}{0} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z - 2}{1}$

Sean los puntos  $A(1,0,-1)$  y  $B(2,-1,3)$ .

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por  $A$  y por  $B$ .

b) Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos  $ABCD$  sabiendo que la recta determinada por los vértices  $C$  y  $D$  pasa por el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

## R E S O L U C I Ó N

a) El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (1, -1, 4)$ . La distancia será:

$$d(P,r) = \frac{\text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{\text{módulo} (-1, -1, -5)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{3}{2}} u$$

b)

$$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{altura} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} u^2$$

Halla la distancia entre las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 2}{-3} \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y vector director de cada recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z - 2}{-3} \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \frac{5}{3}, 0\right); \vec{u} = \left(0, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 1 = 1 - z \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 0 \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (2, 0, 0); \vec{v} = (-1, 0, 1)$$

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = \left(2, -\frac{5}{3}, 0\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{11}} u$$

*módulo*

Considera los puntos  $P(6,-1,-10)$ ,  $Q(0,2,2)$  y  $R$ , que es el punto de intersección del plano  $\pi \equiv 2x + \lambda y + z - 2 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ . Determina  $\lambda$ , sabiendo que los puntos  $P$ ,

$Q$  y  $R$  están alineados.

**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, para ello pasamos la recta a paramétricas y la sustituimos en la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$2x + \lambda y + z - 2 = 0 \Rightarrow -2t + \lambda + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \lambda - 2$$

Luego el punto  $R$  tiene de coordenadas  $R = (-\lambda + 2, 1, \lambda - 2)$ .

La ecuación de la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  es:  $\frac{x-6}{-6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+10}{12}$

Y como el punto  $R$  tiene que cumplir esta ecuación, tenemos que:

$$\frac{-\lambda + 2 - 6}{-6} = \frac{1 + 1}{3} = \frac{\lambda - 2 + 10}{12} \Rightarrow \frac{-\lambda - 4}{-6} = \frac{2}{3} = \frac{\lambda + 8}{12} \Rightarrow \lambda = 0$$

Considera el plano  $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación de un plano perpendicular a  $\pi$  y que contenga a la recta  $r$ .

b) ¿Hay algún plano paralelo a  $\pi$  que contenga a la recta  $r$ ? En caso afirmativo determina sus ecuaciones.

**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - z = 2 \end{cases}$$

El haz de planos que contiene a la recta  $r$  es:  $x - y + k(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow (1 + 3k)x - y - kz - 2k = 0$

Como queremos que sea perpendicular al plano  $\pi$ , sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, luego:

$$(2, 1, -1) \cdot (1 + 3k, -1, -k) = 0 \Rightarrow 2 + 6k - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{7}$$

Sustituyendo tenemos que el plano pedido es:  $x - y - \frac{1}{7}(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow 4x - 7y + z + 2 = 0$

b) Si queremos que sea paralelo, sus vectores normales tienen que ser paralelos, luego:

$$\frac{1 + 3k}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{-k}{-1} \Rightarrow k = -1$$

Sustituyendo tenemos que el plano pedido es:  $x - y - 1(3x - z - 2) = 0 \Rightarrow -2x - y + z + 2 = 0$

$$\text{Las rectas } r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

contienen dos lados de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

## R E S O L U C I Ó N

a) Las rectas  $r$  y  $s$ , serán paralelas, luego si calculamos la distancia de un punto de la recta  $r$  a la recta  $s$  tendremos el lado del cuadrado.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (2, 0, 0); \vec{u} = (-1, 1, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + y - z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (6, 0, 0); \vec{u} = (-1, 1, 0)$$

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (4, 0, 0)$ . La distancia será:

$$d(A,s) = \frac{\text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\text{módulo} (0, 0, -4)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \, u$$

Luego, el área del cuadrado será:  $\text{Área} = l^2 = (\sqrt{8})^2 = 8 \, u^2$

b) El plano viene definido por el punto  $A$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{AB}$ , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 4 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Calcula el área del triángulo de vértices  $A(0,0,1)$ ,  $B(0,1,0)$  y  $C$ , siendo  $C$  la proyección ortogonal del punto  $(1,1,1)$  sobre el plano  $x + y + z = 1$ .

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la proyección del punto  $(1,1,1)$  sobre el plano.

Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto  $A$  es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = (1,1,1)$$

La ecuación paramétrica de la recta será:

$$\begin{aligned}x &= 1 + t \\y &= 1 + t \\z &= 1 + t\end{aligned}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $C$ ); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$1 + t + 1 + t + 1 + t = 1; 3t = -2; t = -\frac{2}{3}$$

luego las coordenadas del punto  $C$  son:  $x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ;  $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ;  $z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (0,1,-1)$  y  $\vec{AC} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  y aplicamos la fórmula del área del triángulo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{6} u^2$$

Considera el punto  $A(0,1,-1)$ , la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - z = -4 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x - 2y - z = 2$ . Halla la ecuación de la recta que pasa por  $A$ , es paralela a  $\pi$  y corta a  $r$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

El vector  $\vec{AB} = \left( \frac{-4+t}{2}, \frac{-8+3t}{4}, t+1 \right)$  y el vector normal del plano tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\left( \frac{-4+t}{2}, \frac{-8+3t}{4}, t+1 \right) \cdot (1, -2, -1) = 0 \Rightarrow \frac{-4+t}{2} + \frac{8-3t}{2} - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\vec{AB} = \left( \frac{-4+\frac{1}{2}}{2}, \frac{-8+3\frac{1}{2}}{4}, \frac{1}{2}+1 \right) = \left( -\frac{7}{4}, -\frac{13}{8}, \frac{3}{2} \right) = (14, 13, -12)$$

Luego, la recta pedida es:  $\frac{x}{14} = \frac{y-1}{13} = \frac{z+1}{-12}$

Se sabe que el triángulo  $ABC$  es rectángulo en el vértice  $C$ , que pertenece a la recta intersección de los planos  $y+z=1$  e  $y-3z+3=0$ , y que sus otros dos vértices son  $A(2,0,1)$  y  $B(0,-3,0)$ .  
Halla  $C$  y el área del triángulo  $ABC$ .  
MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

$$\left. \begin{array}{l} y+z=1 \\ y-3z=-3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \text{el punto } C \text{ tiene de coordenadas } C(t,0,1).$$

Como los vectores  $\vec{CA} = (2-t, 0, 0)$  y  $\vec{CB} = (-t, -3, -1)$  tienen que ser perpendiculares, tenemos:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow -2t + t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 ; t = 2$$

Luego, el vértice  $C$  es:  $C(0,0,1)$ , no puede valer  $t = 2$ , ya que obtenemos el punto  $A$ .

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \vec{CA} \right| \cdot \left| \vec{CB} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{10} \text{ u}^2$$

Halla la perpendicular común a las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A = (1, 1, \alpha)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B = (\beta, \beta - 1, -1)$ .

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (\beta - 1, \beta - 2, -1 - \alpha)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular a la recta  $r$  y  $s$  se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow -1 - \alpha = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow \beta - 1 + \beta - 2 = 0\end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que  $\alpha = -1$  y  $\beta = \frac{3}{2}$ .

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto  $A = (1, 1, -1)$  y su vector director es el

$$\vec{AB} = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) = (1, -1, 0)$$

La perpendicular común tiene de ecuación:  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$