PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2004

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot B; A\cdot C; A^t\cdot B^t$ y $C^t\cdot A^t$, siendo $A^t; B^t$ y C^t las matrices transpuestas de A, B y C, respectivamente.
b) Razona cuáles de las matrices A, B, C y $A\cdot B$ tienen inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.
MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$$

$$A^t\cdot B^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$$

$$C^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$$

b) Solamente la matriz $A\cdot B$ tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$(A\cdot B)^{-1}=\frac{((A\cdot B)^d)^t}{|A\cdot B|}=\frac{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz *M*.

a) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que det(*A*) = 4; calcula los siguientes determinantes:

$$\det(-3A^t) \text{ y } \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$$

b) Sea *I* la matriz identidad de orden 3 y sea *B* una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula det(*B*).

c) Sea *C* una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser det(*C*) = 3? Razona la respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 2, tenemos que: $|-3A^t| = (-3)^2 \cdot |A^t| = 9\cdot 4 = 36$, ya que también se cumple que: $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -6\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6\cdot 4 = 24$$

b) $|B^3| = |I| \Rightarrow |B|\cdot|B|\cdot|B| = |I| \Rightarrow |B|^3 = 1 \Rightarrow |B| = \sqrt[3]{1} = 1$

c) Sabemos que: $C\cdot C^{-1} = I \Rightarrow |C|\cdot|C^{-1}| = |I| = 1$

Si $|C| = 3 \Rightarrow |C^{-1}| = \dfrac{1}{3} \Rightarrow |C^t| = \dfrac{1}{3}$, lo cual es falso, ya que: $|C| = |C^t|$

Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$ **: Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$ **; b)** $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **; c)** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 15\cdot(-2) = -30$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".

b) $$\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3\cdot(-2) = 6$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo".

c) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2+0 = -2$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0".

Sabiendo que: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$**, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes: a)** $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$ **; b)** $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$ **; c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot (-6) = 18$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".

b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) = -12$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo".

c)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-6) = 6$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0".