

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2004

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera el sistema de ecuaciones:
$$\left. \begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m - 1 \end{aligned} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de m .

b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 ; m = -1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

| | R(A) | R(M) | |
|-------------------|------|------|-----------------------------|
| $m = 1$ | 1 | 1 | S. Compatible Indeterminado |
| $m = -1$ | 1 | 3 | S. Incompatible |
| $m \neq 1$ y -1 | 2 | 2 | S. Compatible Determinado |

b) Resolvemos el sistema para $x = 3$

$$\left. \begin{aligned} 3m - y &= 1 \\ 3 - my &= 2m - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 3m - 1 \Rightarrow 3 - m(3m - 1) = 2m - 1 \Rightarrow 3m^2 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1; m = -\frac{4}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + \lambda y = \lambda \\ \text{Considera el sistema de ecuaciones: } \lambda x + y + (\lambda - 1)z = 1 \\ \lambda x + y = 2 + \lambda \end{array} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ .

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

| | R(A) | R(M) | |
|--------------------------------|------|------|-----------------------------|
| $\lambda = -1$ | 2 | 2 | S. Compatible Indeterminado |
| $\lambda = 1$ | 2 | 3 | S. Incompatible |
| $\lambda \neq 1 \text{ y } -1$ | 3 | 3 | S. Compatible Determinado |

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ -x + y - 2z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 1 + x \\ z = 0 \end{cases}$$

Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1 € las botellas del tipo A, a 3 € las del tipo B y a 4 € las del tipo C, entonces obtiene un total de 20 €. Pero si vende a 1 € las del tipo A, a 3 € las del B y a 6 € las del C, entonces obtiene un total de 25 €.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.

b) Resuelve dicho sistema.

c) ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero?. (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos x = botellas del tipo A.
 y = botellas del tipo B.
 z = botellas del tipo C.

Leyendo el enunciado del problema podemos plantear un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 4z = 20 \\ x + 3y + 6z = 25 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 4z = 20 \\ x + 3y + 6z = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - 3y \\ y = y \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

c) No, ya que $z = \frac{5}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} mx + 2y + z = 2 \\ x + my = m \\ 2x + mz = 0 \end{array} \right\}$$

Considera el sistema de ecuaciones:

- a) Determina los valores de m para los que $x = 0, y = 1$ y $z = 0$ es solución del sistema.
 b) Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible.
 c) Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 2 ; m = -2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

| | $R(A)$ | $R(M)$ | |
|-----------------------------|--------|--------|-----------------------------|
| $m = 0$ | 2 | 2 | S. Compatible Indeterminado |
| $m = 2$ | 2 | 2 | S. Compatible Indeterminado |
| $m = -2$ | 2 | 2 | S. Compatible Indeterminado |
| $m \neq 0, 2 \text{ y } -2$ | 3 | 3 | S. Compatible Determinado |

- a) Para cualquier valor
 b) Ningún valor
 c) $0, 2 \text{ y } -2$

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2x - 13y + 2z &= 0 \\ (a + 2)x - 12y + 12z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Determina el valor a para que tenga soluciones distintas de la solución trivial y resuélvelo para dicho valor de a .

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a hacer la discusión del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 19a - 190 = 0 \Rightarrow a = 10$$

Luego, si $a = 10$, el sistema tiene soluciones distintas de la trivial. Resolvemos el sistema y nos queda:

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2x - 13y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -z ; y = 0 ; z = z$$

Se sabe que el sistema de ecuaciones:
$$\left. \begin{array}{l} x + \alpha y = 1 \\ x + \alpha z = 1 \\ y + z = \alpha \end{array} \right\} \text{ tiene una \u00fanica soluci\u00f3n.}$$

a) Prueba que $\alpha \neq 0$.

b) Halla la soluci\u00f3n del sistema.

MATEM\u00c1TICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCI\u00d3N A.

R E S O L U C I \u00d3 N

a) Vamos a hacer la discusi\u00f3n del sistema. Para ello calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

A continuaci\u00f3n, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusi\u00f3n:

| | R(A) | R(M) | |
|-----------------|------|------|-----------------------------|
| $\alpha = 0$ | 2 | 2 | S. Compatible Indeterminado |
| $\alpha \neq 0$ | 3 | 3 | S. Compatible Determinado |

b) resolviendo el sistema, tenemos que: $x = \frac{-2 + \alpha^2}{-2}; y = \frac{\alpha}{2}; z = \frac{\alpha}{2}$

Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones $\left. \begin{array}{l} x+3y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ ax+by+z=4 \end{array} \right\}$ tiene al menos dos

soluciones distintas.

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema tiene que ser compatible indeterminado, luego: $Rango(A) = Rango(M) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 5a - 3b - 4 = 0 \\ |M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ a & b & 4 \end{vmatrix} = -4a + 16 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4 ; b = 8$$

a) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a ?

b) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si el rango de A es 2, esto quiere decir que el determinante de orden 3 tiene que valer 0, luego:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -12a - 4 + a - 1 - 4 + 2a + 6a - 6 = -3a - 15 = 0 \Rightarrow a = -5$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - 4y - 2z = 0 \\ -x - 6y - 5z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 + 8z}{-10} \\ y = \frac{-1 + 7z}{-10} \\ z = z \end{cases}$$