PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2005

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene A inversa?. En caso afirmativo, calcúlala.

b) Determina la matriz X que cumple que $A\cdot X+C\cdot B^t=B\cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-4-3=-7 \Rightarrow \text{La matriz A tiene inversa}$$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-7}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-7}=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

b)

$$A\cdot X+C\cdot B^t=B\cdot B^t \Rightarrow A\cdot X=B\cdot B^t-C\cdot B^t=(B-C)\cdot B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(B-C)\cdot B^t \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(B-C)\cdot B^t$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

Halla la matriz X que cumple que: $A \cdot X \cdot A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot X \cdot A = B + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X \cdot A = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$$

Vamos a calcular la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{\left(A^d\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz X será:

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$

a) Determina el valor de b para el que $A^2-2A+I=0$.

b) Para b = 2 halla la matriz X que cumple que $A\cdot X-2A^t=0$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 2-b \\ b-2 & 0 & b^2-2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow b=2$$

b) $A\cdot X=2\cdot A^t\Rightarrow X=2\cdot A^{-1}\cdot A^t$; $X=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que la matriz $A - x \cdot I$ no tiene inversa.

b) Halla los valores de a y b para los que $A^2 + a \cdot A + b \cdot I = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A - xI$

$$A - xI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

Dicha matriz no tendrá inversa para aquellos valores que anulen su determinante, luego:

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases}$

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$; b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-3A| = (-3)^3 \cdot |A| = (-27) \cdot 2 = -54$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

b) $$\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo".

c) $$\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0".