PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2006

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo *a* un número real.

a) Calcula el valor de *a* para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

b) Calcula, en función de *a*, los determinantes de $2A$ y A^t, siendo A^t la transpuesta de A.
c) ¿Existe algún valor de *a* para el que la matriz A sea simétrica?. Razona la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a=12 \\ a^2+a=20 \end{cases} \Rightarrow a=4$$

b) $$|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

c) Si A es una matriz simétrica $\Rightarrow A = A^t$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \text{No es posible.}$$

Sea $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

a) Calcula los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A-\lambda I|=0$.

b) Calcula $A^2-7A+10I$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-\lambda I$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda=2 \ ; \ \lambda=5$$

b)

$$A^2-7A+10I=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-7\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+10\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ **;** $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la matriz inversa de $A\cdot B+C$ **.**

b) Calcula, si existen, los números reales x **e** y **que verifican:** $C\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos primero la matriz $A\cdot B+C$

$$A\cdot B+C=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B+C)^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}8 & -10\\5 & -7\end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}8 & 5\\-10 & -7\end{pmatrix}}{-6}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{6} & -\frac{5}{6}\\ \frac{10}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

b) $C\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-x-2y\\6x+6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-4x-2y=0\\6x+3y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=-2x\end{cases}$

Resuelve $A \cdot B^t \cdot X = -2C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \ y \ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Tenemos que resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a - 6c = -2 \\ -5a - 2c = 0 \\ -b - 6d = -8 \\ -5b - 2d = 2 \end{cases}$$

Resolviendo, tenemos que la matriz X es: $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$