PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz $B=A^2-2A$.

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) Calcula B^{-1} para $\lambda=1$.

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de *B*.

$$|B|=\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{vmatrix}=-\lambda^2+2\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1 \ ; \ \lambda=3$$

Luego tiene inversa para todos los valores de $\lambda \neq -1 \ y \ 3$

c) Calculamos la matriz inversa de $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{(B^d)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α **para los que la matriz** A **tiene inversa.**

b) Para $\alpha=1$**, calcula** A^{-1} **y resuelve la ecuación matricial** $A\cdot X=B$**.**

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\alpha-2=0\Rightarrow \alpha=\frac{2}{3}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $\alpha\neq\dfrac{2}{3}$.

b) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t}{1}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m.
b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$2A^2 - A = I \Rightarrow 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2m+1=0 \\ 2m^2-m=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{-\frac{1}{2}} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$2M^2 - M = I \Rightarrow 2M^2\cdot M^{-1} - M\cdot M^{-1} = I\cdot M^{-1} \Rightarrow M^{-1} = 2M - I$$

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.

b) Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=2\ ;\ \lambda=1\ ;\lambda=-1$$

b) Calculamos la matriz inversa de $A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{((A-2I)^d)^t}{|A-2I|}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12}=\frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A-I)^2=O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

b) Para m = 2, halla la matriz X tal que $AX-2A^t=O$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow m=0$$

b) Calculamos el determinante de B.

$$AX-2A^t=O\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+2c=2 \\ a+c=4 \\ b+2d=2 \\ b+d=2 \end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$