

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 3$$

a) Esboza las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.

b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Para dibujar la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, vamos a calcular sus extremos relativos y puntos de corte con los ejes.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = -2$$

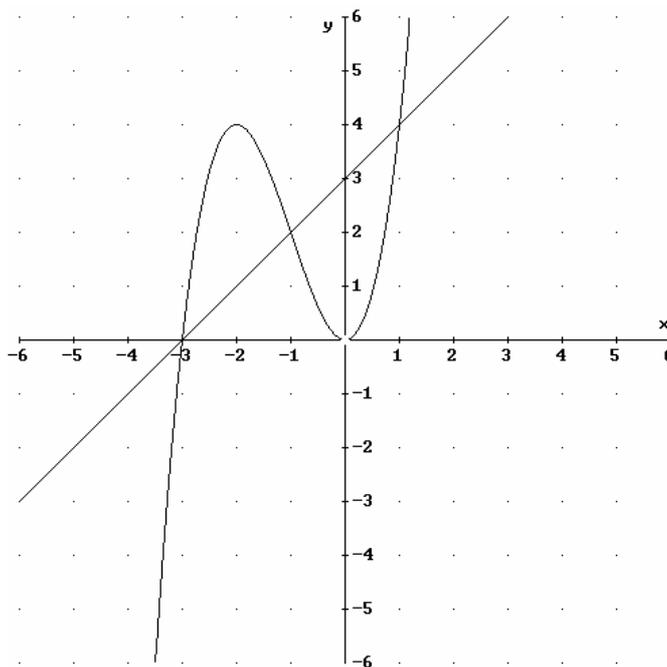
$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (0, 0)$$

$$f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo } (-2, 4)$$

La función corta al eje X en $(0, 0)$ y $(-3, 0)$.

Para dibujar la función $g(x) = x + 3$, basta con hacer una tabla de valores, ya que es una recta.



Vemos claramente en el dibujo que las funciones se cortan en los puntos: $(-3, 0)$; $(-1, 2)$ y $(1, 4)$

b)

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} [(x^3 + 3x^2) - (x + 3)] dx = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} = 4u^2$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 [(x + 3) - (x^3 + 3x^2)] dx = \int_{-1}^1 (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^1 = 4u^2$$

Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{Ln}(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\int \text{Ln}(1+x^2) dx = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - \int 2 dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx = \\ = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2 \text{arc tg } x + C$$

$$u = \text{Ln}(1+x^2); \quad du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = dx; \quad v = x$$

De todas las primitivas de $f(x)$

$$F(x) = x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2 \text{arc tg } x + C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$F(0) = 0 \cdot \text{Ln}(1+0^2) - 2 \cdot 0 + 2 \text{arc tg } 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $x \cdot \text{Ln}(1+x^2) - 2x + 2 \text{arc tg } x$

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{1-x}$$

a) Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte.

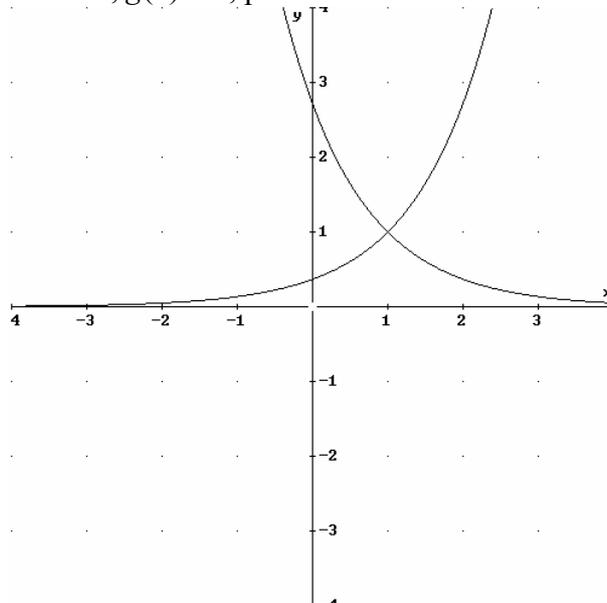
b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de $f(x) = e^{x-1}$, es exactamente igual que la de e^x pero desplazada una unidad a la derecha en abscisas OX (en negro).

Como $g(x) = e^{1-x} = e \cdot e^{-x}$, sabemos que la gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por e , está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si $x = 0$, $g(0) = e$, por tanto un esbozo de dichas gráficas es



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $e^{x-1} = e^{1-x} \Rightarrow x-1 = 1-x \Rightarrow x=1$, con lo cual el punto de corte es $(1, 1)$.

$$b) A = \int_0^1 (e^{1-x} - e^{x-1}) dx = \left[-e^{1-x} - e^{x-1} \right]_0^1 = -1 - 1 + e + \frac{1}{e} = -2 + e + \frac{1}{e}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.

a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) Haz un esbozo de la gráfica de f .

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función $f(x) = x(x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x$

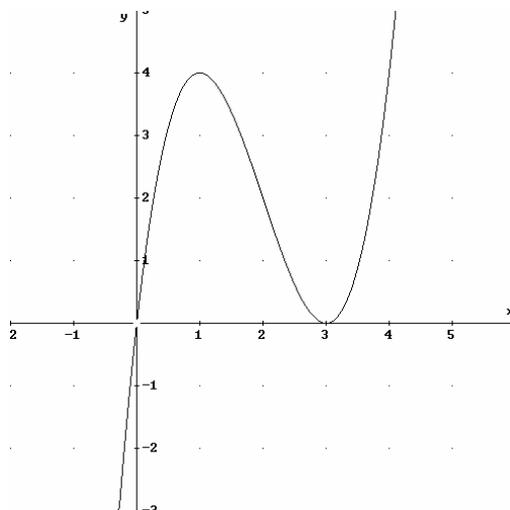
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
Signo y'	+	-	+
Función	C	D	C

\downarrow \downarrow
 Máximo (1,4) mínimo (3,0)

b) Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos los cortes con los ejes.

Puntos de corte (0, 0) y (3, 0)



c)
$$A = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{27}{4} u^2$$

$$\text{Sea } I = \int \frac{2}{2 - e^x} dx.$$

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t = e^x$.

b) Calcula I .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} I = \int \frac{2}{2 - e^x} dx = \int \frac{2}{2 - t} \cdot \frac{dt}{t}$$

b)

$$I = \int \frac{2}{2 - e^x} dx = \int \frac{2}{2 - t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{A}{2 - t} dt + \int \frac{B}{t} dt = -\ln(2 - t) + \ln t = -\ln(2 - e^x) + \ln e^x + C = x - \ln(2 - e^x) + C$$

$$\frac{2}{2 - t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{A}{2 - t} + \frac{B}{t} = \frac{A \cdot t + B(2 - t)}{(2 - t) \cdot t} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1 \\ t = 2 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1 \end{cases}$$

Sea $f : (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - \beta}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

a) Determina α y β sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable, primero tiene que ser continua en $x = -1$, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{-1} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - \beta}{2} = \frac{1 - \beta}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{-1} = \frac{1 - \beta}{2} \Rightarrow 2\alpha = -1 + \beta \Rightarrow 2\alpha - \beta = -1$$

Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = -\alpha \\ f'(-1^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior nos queda: $2\alpha - \beta = -1 \Rightarrow 2 - \beta = -1 \Rightarrow \beta = 3$

b)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{-2}^{-1} = -\ln 2$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determina el valor de α sabiendo que f es derivable.

b) Haz un esbozo de la gráfica de f .

c) Calcula $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$

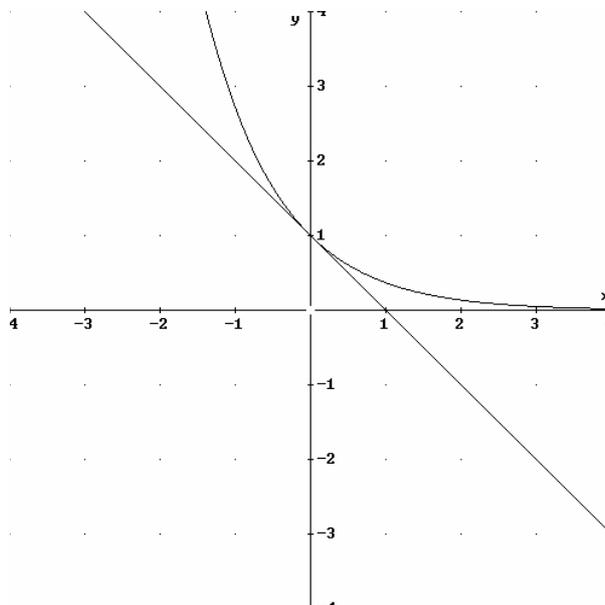
$$f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x < 0 \\ -e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \alpha \\ f'(0^+) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = -1$$

b) Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta que $1 - x$ es una recta y con dos puntos nos basta para dibujarla, en concreto $(0, 1)$ y $(-1, -2)$.

La gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de la exponencial e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY.

Un esbozo sería:



c)

$$\int_{-1}^0 (1-x) dx + \int_0^1 e^{-x} dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{e}$$

Calcula

a) $\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + \int \frac{4}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 4 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+1| + 4 \operatorname{arctg} x + C$$

b) Calculamos primero la integral por partes

$$\int x \cdot \cos 2x dx = \frac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx; \quad v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos 2x dx = \left[\frac{x \cdot \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

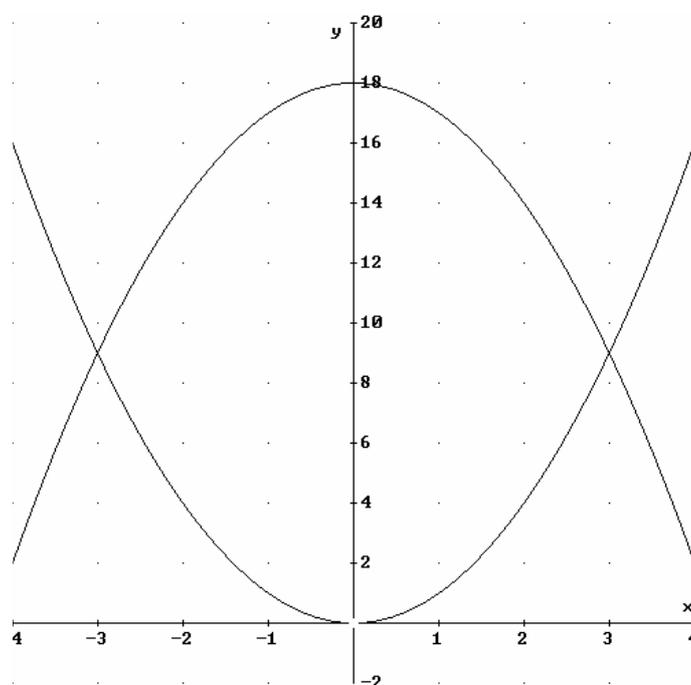
sea 72 (unidades de área).

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La gráfica de $f(x) = x^2$ es una parábola que tiene su vértice en $(0,0)$ y las ramas hacia arriba.

Como $\beta > 0$, la gráfica de $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ es igual que la de $-x^2$ (como la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX) pero desplazada hacia arriba $2\beta^2$ en OY . Aunque no lo piden las gráficas conjuntas son:



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $x^2 = -x^2 + 2\beta^2 \Rightarrow x = \beta$; $x = -\beta$.

$$72 = \int_{-\beta}^{\beta} (-x^2 + 2\beta^2 - x^2) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2\beta^2 x \right]_{-\beta}^{\beta} = -\frac{2}{3}\beta^3 + 2\beta^3 - \left(-\frac{2}{3}\beta^3 + 2\beta^3 \right) = \frac{8}{3}\beta^3 \Rightarrow \beta = 3$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$.

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

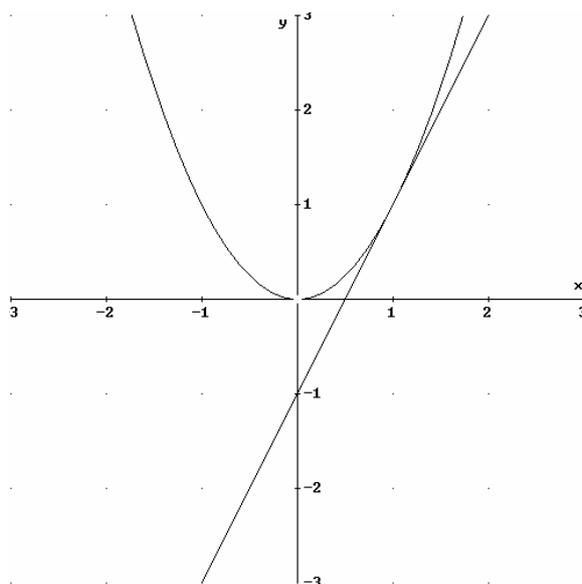
a) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$- f(1) = 1$$

$$- f'(1) = 2$$

Luego, la recta tangente es: $y - 1 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$

b) Un esbozo de la gráfica de ambas funciones es:



Las funciones se cortan en el punto (1, 1)

El área pedida es:

$$A = \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12} u^2$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-2|$.

a) Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.

b) Esboza la gráfica de f .

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Las funciones $-x^2 + 2x$ y $x^2 - 2x$ por ser polinómicas son continuas y derivables en \mathbb{R} . En el único punto donde puede haber problemas es en $x = 2$, que es el punto donde cambiamos de una a otra. Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 2$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 2$:

1) $f(2) = 0$

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

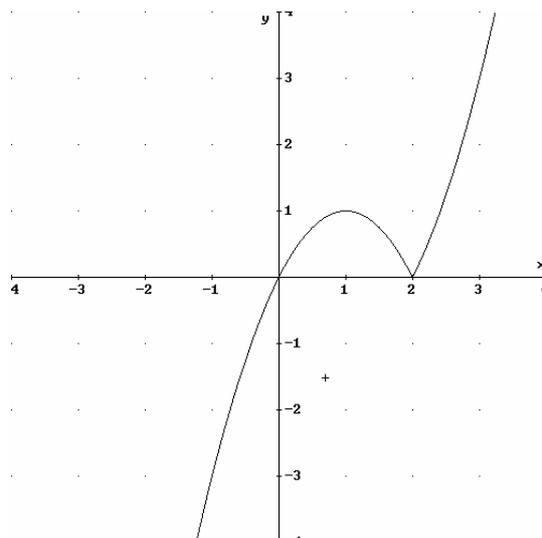
3) $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

Por lo tanto, la función es continua en $x = 2$

Estudiamos ya la derivabilidad de $f(x)$, en particular en $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b)



c) El área pedida será: $A = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{4}{3} u^2$

Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \text{Ln}(x+1)$. (Ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

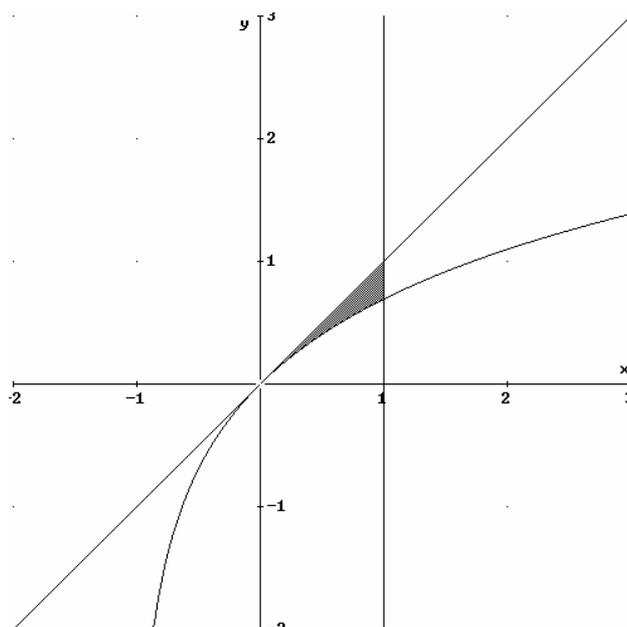
a) La recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = \text{Ln}1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_0^1 (x - \text{Ln}(x+1)) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\text{Ln}(x+1) + x - \text{Ln}(x+1) \right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2\text{Ln}2$$

$$\int \text{Ln}(x+1) dx = x\text{Ln}(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x\text{Ln}(x+1) - \int 1 - \frac{1}{x+1} dx = x\text{Ln}(x+1) - x + \text{Ln}(x+1)$$

$u = \text{Ln}(x+1); \quad du = \frac{1}{x+1} dx$ $dv = dx; \quad v = x$
--