PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2008

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.
a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?.
b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) No es posible ya que el sistema resultante resulta ser incompatible. En efecto:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=130 \\ 10x+20y+50z=3000 \\ x-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 1 & 2 & 5 & 300 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 4 & 170 \\ 0 & -1 & -4 & -130 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 4 & 170 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{No}$$

tiene solución.

b)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=130 \\ 10x+20y+50z=3000 \\ x-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 1 & 2 & 5 & 300 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 4 & 170 \\ 0 & -1 & -3 & -130 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 4 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=80 \; ; \; y=10 \; ; \; z=40$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro *m* para los que el rango de *A* es menor que 3.

b) Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.**

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A y lo igualamos a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^2(m^2 - 2m + 1) = 0 \Rightarrow m = 0 \ ; \ m = 1$$

Luego, para $m = 0 \ y \ m = 1$ el rango de A es menor que 3.

b) Hacemos la discusión del sistema

	R(A)	R(M)	
$m = 0$	1	2	S.Incompatible
$m = 1$	1	1	S.Compatible Indeterminado

Luego, el sistema tiene solución para $m = 1$

La solución para $m = 1$, es: $\left. x + y + z = 1 \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} x+\lambda y-z &= 0 \\ 2x+y+\lambda z &= 0 \\ x+5y-\lambda z &= \lambda+1 \end{aligned}\right\}$

a) Clasifícalo según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=-1$.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 5 & -\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2-6\lambda-9=0 \Rightarrow \lambda=3 \ ; \ \lambda=-1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=3$	2	3	S. Incompatible
$\lambda=-1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq -1$ y 3	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo para $\lambda=-1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y-z&=0 \\ 2x+y-z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2z}{3} \\ y=-\dfrac{z}{3} \\ z=z \end{cases}$

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1 \\ ky+z &= 0 \\ x+(k+1)y+kz &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.
b) Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga $z=2$.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix} = k^2 - k = 0 \Rightarrow k = 0 \ ; \ k = 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$k=1$	2	3	S. Incompatible
$k=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 0 \ y \ 1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo, sabiendo que $z=2$:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1 \\ ky+2 &= 0 \\ x+(k+1)y+2k &= k+1 \end{aligned}\right\}$$

Para que el sistema tenga solución, el determinante de la matriz ampliada debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 0 \ ; \ k = 2$$

Como en el apartado a) hemos visto que para $k=0$ el sistema era incompatible, sólo nos queda como solución posible que $k=2$

Halla los valores del parámetro *m* que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -x+2y-2z&=2 \\ 2x+y+z&=m \\ x+3y-z&=m^2 \end{aligned}\right\}$$

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, luego, para que el sistema tenga solución el rango de la matriz ampliada también debe ser 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = -5m^2+5m+10=0 \Rightarrow m=-1 \ ; \ m=2$$

a) Determina razonadamente los valores del parámetro *m* para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=mx\\ x+2y+z&=my\\ x+2y+4z&=mz \end{aligned}\right\}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $m=0$ y para el caso $m=1$.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es ordenar el sistema.

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=mx\\ x+2y+z&=my\\ x+2y+4z&=mz \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (2-m)x+y+z&=0\\ x+(2-m)y+z&=0\\ x+2y+(4-m)z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1\\ 1 & 2-m & 1\\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix}=-m^3+8m^2-16m+9=0\Rightarrow m=1\ ;\ m=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$$

Luego, este sistema homogéneo tiene más de una solución para los valores $m=1$ y $m=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$

b) Vamos a resolverlo

Caso1: $m=0\Rightarrow$ Sistema homogéneo incompatible, sólo tiene la solución trivial $x=y=z=0$

Caso2: $m=1\Rightarrow$ Sistema homogéneo incompatible, sólo tiene la solución trivial $x=y=z=0$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y+3z&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=-z\\ x+2y&=-3z \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{cases} x=z\\ y=-2z\\ z=z \end{cases} \text{ y solución trivial}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} x+y+z &= a-1 \\ 2x+y+az &= a \\ x+ay+z &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro *a*.
b) Resuélvelo en el caso $a = 2$.
MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=1 \; ; \; a=2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$a=1$	2	3	S. Incompatible
$a=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a \neq 1 \; y \; 2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo para $a=2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= 1-z \\ 2x+y &= 2-2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$

Sabemos que el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y + 3z = 1} \\ \mathbf{x + 2y - z = 2} \end{array}\right\}$

tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $\boldsymbol{ax + y + 7z = 7}$

a) Determina el valor de *a*.

b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El determinante de la matriz de los coeficientes del sistema formado con las tres ecuaciones debe valer cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 7 \end{vmatrix} = -5a + 40 = 0 \Rightarrow a = 8$$

b) Vamos a resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 - 3z \\ x + 2y = 2 + z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4-5z}{5} \\ y = \dfrac{3+5z}{5} \\ z = z \end{cases}$

Como la suma de las incógnitas tiene que valer 1, tenemos:

$$x + y + z = 1 \Rightarrow \frac{4-5z}{5} + \frac{3+5z}{5} + z = 1 \Rightarrow z = -\frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$