Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido 40.500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% DE LAS CAJAS.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Planteamos un sistema de ecuaciones.

x = cajas de 30 €
y = cajas de 20 €
z = cajas de 40 €

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1500 \\ 30x+20y+40z=40500 \\ x=450 \end{array}\right\} \Rightarrow x=450 \ ; \ y=750 \ ; \ z=300$$

Luego, en el primer mercado se ha pagado $30 \cdot 450 = 13.500$ €, en el segundo mercado se ha pagado $20 \cdot 750 = 15.000$ € y en el tercer mercado se ha pagado $40 \cdot 300 = 12.000$ €.

Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos *A*, *B* y *C*.

Pista 1: Si compramos una unidad de *A*, dos de *B* y una de *C* gastamos 118 €.

Pista 2: Si compramos *n* unidades de *A*, *n*+3 unidades de *B* y 3 de *C* gastamos 390 €.

a) ¿Hay algún valor de *n* para el que estas dos pistas sean incompatibles?.

b) Sabiendo que *n* = 4 y que el producto *C* cuesta el triple que el producto *A*, calcula el precio de cada producto.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\left.\begin{array}{r} A+2B+C=118 \\ nA+(n+3)B+3C=390 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n & n+3 & 3 \end{pmatrix}$$

Para $n=3$, el sistema resulta incompatible, ya que $Rango\ A=1$ y $Rango\ M=2$.

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} A+2B+C=118 \\ 4A+7B+3C=390 \\ C=3A \end{array}\right\} \Rightarrow A=23\ ;\ B=13\ ;\ C=69$$

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} x+\lambda y+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ \lambda x+y+z=4 \end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ .
b) Resuélvelo en el caso $\lambda = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \ ; \ \lambda = 3$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = 3$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 1 \ y \ 3$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Vamos a resolverlo para $\lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=4-z \\ x+3y=5-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7}{2} - z \\ y = \frac{1}{2} \\ z = z \end{array}\right.$

a) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x \quad\;\; + \;\; z = 2 \\ -x + \;\; y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 2 \end{array}\right\}$

b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado (a) $\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = \;\;\; 1 \\ -x + \;\; y + 3z = \;\;\; 1 \\ x + 2y + \lambda z = -3 \end{array}\right\}$

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema es compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} x \quad\;\; + \;\; z = 2 \\ -x + \;\; y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \quad = 2 - z \\ -x + y = -2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - z \\ y = 2 - 3z \\ z = z \end{array}\right.$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 3$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 1$ y 3	3	3	S. Compatible Determinado

Resolvemos el sistema compatible determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{-10}{2\lambda - 6} = \frac{-5}{\lambda - 3} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda + 14}{2\lambda - 6} = \frac{\lambda + 7}{\lambda - 3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}} = \frac{-10}{2\lambda - 6} = \frac{-5}{\lambda - 3}$$

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Calcula, si existe, A^{-1}**.**
b) Resuelve el sistema $AX=3X$ **e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones.**
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-6 & -6 & 3\\ -6 & 3 & -6\\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix}^t}{27}=\frac{\begin{pmatrix}-6 & -6 & 3\\ -6 & 3 & -6\\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix}}{27}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

b) Resolvemos el sistema $\left.\begin{aligned}-2x-2y+z&=3x\\ -2x+y-2z&=3y\\ x-2y-2z&=3z\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}-5x-2y+z&=0\\ -x-y-z&=0\\ x-2y-5z&=0\end{aligned}\right.$

Como Rango(A) = Rango(M) = 2 $\Rightarrow$ Son tres planos distintos que se cortan en una recta

$$\left.\begin{aligned}-5x-2y+z&=0\\ -x-y-z&=0\\ x-2y-5z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}5x+2y&=z\\ -x-y&=z\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=z\ ;\ y=-2z\ ;\ z=z$$

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y=m+1} \\ \boldsymbol{x+my+z=\quad 1} \\ \boldsymbol{mx+y-z=\quad m} \end{array}\right\}$ **a) Determina los valores de *m* para los que el sistema es compatible.**   **b) Resuelve el sistema en el caso $\boldsymbol{m=-1}$.**   **MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rango(A) = 2 \text{ para cualquier valor de } m$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a cero

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0 \ ; \ m = -1$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=-1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m \neq 0,1,-1$	2	3	S. Incompatible

b) Vamos a resolverlo para $m=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-y=1-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-z}{2} \\ y=\dfrac{-1+z}{2} \\ z=z \end{array}\right.$

a) Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema $\left.\begin{array}{l} \mathbf{3x+\lambda y = 0} \\ \mathbf{x + \lambda z = \lambda} \\ \mathbf{x+y+3z=1} \end{array}\right\}$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$.
MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \lambda = 6$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda = 6$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 0 \ y \ 6$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Lo resolvemos para $\lambda = 0$. El sistema es $\left.\begin{array}{l} 3x = 0 \\ x+y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1-3z \\ z = z \end{array}\right.$