PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2009

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFÍN Y EUCLÍDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Se considera la recta *r* definida por $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ **y la recta s definida por** $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases}$**. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a *r* y *s*.**
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (1, 1, \lambda - 2)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (\mu, \mu - 1, -1)$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tendrá de coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (\mu - 1, \mu - 2, -\lambda + 1)$

Como el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -\lambda + 1 = 0$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \mu - 1 + \mu - 2 = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $\lambda = 1$ y $\mu = \frac{3}{2}$.

Luego, la recta que nos piden pasa por el punto $A = (1, 1, -1)$ y su vector director es el $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = (1, -1, 0)$

La perpendicular común tiene de ecuación: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$

Otra forma: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (1, 1, -2) \\ \vec{u} = (0, 0, 1) \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu - 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (0, -1, -1) \\ \vec{v} = (1, 1, 0) \end{cases}$

Calculamos el vector $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$

Calculamos el plano determinado por $(A, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z+2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + y - 2 = 0$

Calculamos el plano determinado por $(B, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z + 1 = 0$

Luego, la perpendicular común es: $\left.\begin{array}{r} x + y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

Considera la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.
a) Estudia la posición relativa de ambas rectas.
b) Determina un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta *s*.

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-z=2 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \\ x-y=1 \\ x-z=2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 3, las dos rectas son secantes.

b) Cualquier punto C tiene de coordenadas $C(2-t,t,-t)$. Calculamos los vectores $\vec{CA}=(t,1-t,t)$ y $\vec{CB}=(-1+t,-t,-1+t)$, y como tienen que ser perpendiculares, tenemos:

$$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=0 \Rightarrow 3t^2-3t=0 \Rightarrow t=0 \ ; \ t=1$$

Luego el punto C puede ser: $C(2,0,0)$; $C(1,1,-1)$

Considera el punto $A(1,-2,1)$ y la recta *r* definida por las ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{array}\right\}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a *r* que pasa por *A*.
b) Calcula la distancia del punto *A* a la recta *r*.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=5-t \\ y=-3+t \\ z=t \end{cases}$

El plano tiene como vector normal el vector director de la recta $(-1,1,1)$, luego, su ecuación será:

$$-x+y+z+D=0$$

y, como debe pasar por el punto $A=(1,-2,1)$, se debe cumplir:

$$-1\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=2$$

Por lo tanto, el plano pedido tendrá de ecuación:

$$-x+y+z+2=0$$

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$-(5-t)+(-3+t)+t+2=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow P=(3,-1,2)$$

La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PA}$, luego:

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}\ u$$

Considera la recta *r* definida por $\left.\begin{array}{r} y=-1 \\ 2x-z=\ \ 2 \end{array}\right\}$ **y la recta *s* definida por** $\left.\begin{array}{l} x=4+3\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=5+4\lambda \end{array}\right\}$.

Halla la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el haz de planos de la recta r:

$$y+1+k(2x-z-2)=0 \Rightarrow 2kx+y-kz+1-2k=0$$

Si la recta s es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u}=(3,-1,4)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(2k,1,-k)$ debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 3\cdot 2k-1\cdot 1-4\cdot k=0 \Rightarrow 2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Luego, el plano pedido es: $y+1+\dfrac{1}{2}(2x-z-2)=0 \Rightarrow 2x+2y-z=0$

Considera el punto $P(1,0,-2)$, la recta r definida por $\left.\begin{array}{r} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{array}\right\}$ y el plano π de ecuación $2x+y+3z-1=0$.
a) Halla la ecuación del plano que pasa por *P*, es paralelo a *r* y es perpendicular a π.
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por *P*, corta a *r* y es paralela a π.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $r \equiv \left.\begin{array}{r} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=(5,0,2) \\ \vec{u}=(-2,-1,1) \end{array}\right.$

El plano que nos piden viene definido por $P(1,0,-2)$, $\vec{u}=(-2,-1,1)$ y $\vec{n}=(2,1,3)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y & -1 & 1 \\ z+2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2y-1=0$$

b) Cualquier punto de la recta r tiene de coordenadas $A(5-2t,2-t,t)$. El vector $\overrightarrow{PA}=(4-2t,2-t,t+2)$ tiene que ser perpendicular al vector $\vec{n}=(2,1,3)$, luego, su producto escalar vale cero.

$$\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (4-2t,2-t,t+2)\cdot(2,1,3)=0 \Rightarrow 8-4t+2-t+3t+6=0 \Rightarrow t=8$$

La ecuación de la recta que nos piden es: $\dfrac{x-1}{-12}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{z+2}{10}$

Considera el plano π de ecuación $3x-2y-2z=7$ y la recta r definida por $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$.
a) Determina la ecuación del plano paralelo a π que contiene a *r*.
b) Halla la ecuación del plano ortogonal a π que contiene a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $r \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y-4=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$

Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r

$$x-2y-4+k(x-z)=0 \Rightarrow (1+k)x-2y-kz-4=0$$

Como queremos el plano paralelo a π, los vectores normales deben ser paralelos, es decir:

$$\frac{1+k}{3}=\frac{-2}{-2}=\frac{-k}{-2} \Rightarrow k=2 \Rightarrow 3x-2y-2z-4=0$$

b) Los vectores normales son perpendiculares, luego, su producto escalar es cero.

$$(1+k,-2,-k)\cdot(3,-2,-2)=0 \Rightarrow 3+3k+4+2k=0 \Rightarrow k=-\frac{7}{5}$$

Luego, el plano pedido es:

$$(1-\frac{7}{5})x-2y+\frac{7}{5}z-4=0 \Rightarrow 2x+10y-7z+20=0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,1,-1)$, paralela al plano de ecuación $x-y+z=1$ y corta al eje Z.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Un punto del eje Z tendrá de coordenadas $B(0,0,a)$. Si la recta es paralela al plano, el producto escalar del vector director de la recta $\vec{AB}=(-1,-1,a+1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1,-1,1)$ debe valer cero.

$$\vec{AB}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(a+1)=0 \Rightarrow a=-1$$

Luego, la recta tiene de ecuación: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$

Sea la recta *r* definida por $\left.\begin{aligned} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{aligned}\right\}$

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a *r* que pasa por el punto $P(1,1,1)$.
b) Halla los puntos de *r* cuya distancia al origen es de 4 unidades.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano que nos piden es el vector director de la recta $\vec{n}=(2,-3,-6)$. Luego la ecuación de todos los planos perpendiculares a *r* es: $2x-3y-6z+D=0$.

Como queremos el que pasa por el punto $P(1,1,1)$, tenemos que:

$$2\cdot 1-3\cdot 1-6\cdot 1+D=0\Rightarrow D=7\Rightarrow 2x-3y-6z+7=0$$

b) $\left.\begin{aligned} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=t \\ y&=-\frac{3}{2}t \\ z&=-3t \end{aligned}\right\}$

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $A\left(t,-\frac{3t}{2},-3t\right)$ y sabemos que su distancia al origen debe ser de 4 unidades, luego:

$$\sqrt{(t-0)^2+\left(-\frac{3t}{2}-0\right)^2+(-3t-0)^2}=4\Rightarrow\sqrt{t^2+\frac{9t^2}{4}+9t^2}=4\Rightarrow t=\pm\frac{8}{7}$$

Luego, los puntos son: $A\left(\frac{8}{7},-\frac{12}{7},-\frac{24}{7}\right)$ y $B\left(-\frac{8}{7},\frac{12}{7},\frac{24}{7}\right)$

Sean la recta *r* definida por $\left.\begin{array}{r} x-y=-2 \\ x-z=-3 \end{array}\right\}$ y la recta *s* definida por $\left.\begin{array}{r} x=\quad 1 \\ 2y-z=-2 \end{array}\right\}$.

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} x-y=-2 \\ x-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=(0,2,3) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \left.\begin{array}{r} x=\quad 1 \\ 2y-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B=(1,0,2) \\ \vec{v}=(0,1,2) \end{cases}$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(1,-2,-1)$. Como el rango de $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right)=3$, las rectas se cruzan.

b) Calculamos el haz de planos de la recta *s*:

$$x-1+k(2y-z+2)=0 \Rightarrow x+2ky-kz-1+2k=0$$

Si la recta *r* es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u}=(1,1,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2k,-k)$ debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 1+2k-k=0 \Rightarrow k=-1$$

Luego, el plano pedido es: $x-1+(-1)(2y-z+2)=0 \Rightarrow x-2y+z-3=0$

Sea el punto $P(2,3,-1)$ y la recta r definida por $\left.\begin{matrix} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{matrix}\right\}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla el punto de r que está más cerca de P.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos de la recta r:

$$x+y+2z-1+k(x-2y-4z-1)=0$$

Como tiene que pasar por el punto P.

$$2+3-2-1+k(2-6+4-1)=0 \Rightarrow k=2$$

Luego, el plano pedido es:

$$x+y+2z-1+2(x-2y-4z-1)=0 \Rightarrow 3x-3y-6z-3=0 \Rightarrow x-y-2z-1=0$$

b) Calculamos la ecuación del plano perpendicular a r.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (0,6,-3) \Rightarrow 6y-3z+D=0$$

El plano perpendicular a r y que pasa por P será: $6\cdot 3-3\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=-21 \Rightarrow 2y-z-7=0$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$\left.\begin{matrix} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \\ 2y-z-7=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right)$$

Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por $x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$.
a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.
b) Halla la ecuación del plano que pasando por *P* es paralelo a *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$r \equiv x-3=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} A=(3,0,-1) \\ \vec{u}=(1,2,-2) \end{cases}$$

$$s \equiv (x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0) \Rightarrow \begin{cases} B=(1,1,0) \\ \vec{v}=(-1,2,0) \end{cases}$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)$. Como el rango de$\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=3$, las rectas se cruzan.

b) El plano viene definido por$\left(P,\vec{u},\vec{v}\right)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 2 & 2 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x+y+2z-2=0$$

Considera la recta *r* definida por $\left.\begin{aligned} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{aligned}\right\}$ **y la recta *s* definida por** $\left.\begin{aligned} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{aligned}\right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.
b) ¿Existe algún plano que contenga a *r* y sea perpendicular a *s*?. Razona la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos de la recta r:

$$x-y+3+k(x+y-z-1)=0 \Rightarrow (1+k)x+(-1+k)y-kz+3-k=0$$

Si la recta s es paralela al plano el producto escalar del vector director de la recta $\vec{u}=(2,0,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1+k,-1+k,-k)$ debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 2\cdot(1+k)+0\cdot(-1+k)+1\cdot(-k)=0 \Rightarrow 2+k=0 \Rightarrow k=-2$$

Luego, el plano pedido es: $x-y+3-2(x+y-z-1)=0 \Rightarrow -x-3y+2z+5=0$

b) Si existe ese plano, el vector director de la recta $\vec{u}=(2,0,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1+k,-1+k,-k)$ deben ser paralelos, luego se debe cumplir que:

$$\frac{1+k}{2}=\frac{-1+k}{0}=\frac{-k}{1} \Rightarrow \text{ No tiene solución, luego, no existe ese plano.}$$