PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2010

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z &= 2 \\ x - y + \lambda z &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

a) Discútelo según los valores de λ . ¿Tiene siempre solución?
b) Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq -1$	3	3	S. Compatible Determinado

Luego, el sistema siempre tiene solución.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$.

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x + y &= 1 - z \\ 2x + y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{4 - 3z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} (m+2)x - y - z &= 1 \\ -x - y + z &= -1 \\ x + my - z &= m \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores de *m*.
b) Resuélvelo para el caso $m = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = m+2-1+m-1+1-m^2-2m = 0 \Rightarrow -m^2+1 = 0 \Rightarrow m = 1 \ ; \ m = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$m = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m = -1$	2	3	S. Incompatible
$m \neq 1 \ y \ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 + z \\ -x - y &= -1 - z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+z}{2} \\ y = \dfrac{1+z}{2} \\ z = z \end{cases}$$

Considera el sistema: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x-2y+z=\ \ 5} \\ \mathbf{2x-3y+z=-4} \end{array}\right\}$

a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x+y+\lambda z=9$ sea compatible indeterminado.

b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -9\lambda-2+2+3-3+4\lambda = 0 \Rightarrow -5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq 0$	3	3	S. Compatible Determinado

b) No hay ningún valor de λ para el cual el sistema no tenga solución.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α para los que *A* tiene inversa.
b) Calcula la inversa de *A* para $\alpha = 1$
c) Resuelve, para $\alpha = 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha + 6\alpha - 2\alpha^2 - 6 = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \ ; \ \alpha = \frac{3}{2}$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq \frac{3}{2}$

b)

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l}\lambda x+2y+6z=\ \ 0\\ 2x+\lambda y+4z=\ \ 2\\ 2x+\lambda y+6z=\lambda-2\end{array}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro λ .
b) Resuélvelo para $\lambda=2$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 6\\ 2 & \lambda & 4\\ 2 & \lambda & 6\end{vmatrix}=6\lambda^2+16+12\lambda-12\lambda-24-4\lambda^2=0\Rightarrow 2\lambda^2-8=0\Rightarrow\lambda=2\ ;\ \lambda=-2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda=-2$	2	3	S. Incompatible
$\lambda\neq 2\ y\ -2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda=2\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y+6z=0\\ 2x+2y+4z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+6z=-2y\\ 2x+4z=2-2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3-y\\ y=y\\ z=-1\end{array}\right.$$

a) Discute según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -x+\lambda y+ \quad\quad z &= \lambda \\ \lambda x+2y+(\lambda+2)z &= 4 \\ x+3y+ \quad\quad 2z &= 6-\lambda \end{aligned}\right\}$$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & \lambda+2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^2+8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = 8$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda = 0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda = 8$	2	3	S. Incompatible
$\lambda \neq 0 \ y \ 8$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$.

$$\left.\begin{aligned} -x+z &= 0 \\ 2y+2z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x &= -z \\ 2y &= 4-2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \dfrac{4-2z}{2} = 2-z \\ z = z \end{cases}$$