PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2010

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera las rectas *r* y *s* de ecuaciones:

$$\boldsymbol{x-1=y=1-z} \quad \textbf{y} \quad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x-2y=-1} \\ \boldsymbol{y+z=\;\;1} \end{array}\right.$$

a) Determina su punto de corte.
b) Halla el ángulo que forma *r* y *s*.
c) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-z \\ x-2y=-1 \\ y+z=\;\;1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3\;;\; y=2\;;\; z=-1$$

Luego, el punto de corte es: $(3,2,-1)$

b) Pasamos las dos rectas a paramétricas.

$$x-1=y=1-z \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+y \\ y=y \\ z=1+y \end{array}\right\} \Rightarrow A=(1,0,1)\;;\; \vec{u}=(1,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ y+z=\;\;1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+2y \\ y=y \\ z=1-y \end{array}\right\} \Rightarrow B=(-1,0,1)\;;\; \vec{v}=(2,1,-1)$$

El ángulo que forman *r* y *s* es el ángulo que forman sus vectores directores, luego:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2+1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{18}}=0'9428 \Rightarrow \alpha=19'47^{\circ}$$

c) El plano viene definido por el punto *A* y los vectores directores de las rectas, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y+z-1=0$$

Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice *S* pertenece a la recta *r* de ecuación $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{4x+3z=33} \\ \mathbf{y=0} \end{array}\right.$.
a) Calcula las coordenadas del punto *S* sabiendo que *r* es perpendicular a la recta que pasa por *P* y *S*.
b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{33-3z}{4} \\ y=0 \\ z=z \end{array}\right\}$$

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $S=\left(\dfrac{33-3t}{4},0,t\right)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{PS}=\left(\dfrac{33-3t}{4}-2,0,t-0\right)=\left(\dfrac{25-3t}{4},0,t\right)$. Este vector es perpendicular al vector director de la recta, luego, su producto escalar vale cero.

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PS}=0\Rightarrow\left(-\frac{3}{4},0,1\right)\cdot\left(\frac{25-3t}{4},0,t\right)=0\Rightarrow-\frac{75}{16}+\frac{9t}{16}+t=0\Rightarrow t=3$$

Luego, el punto *S* tiene de coordenadas $S=\left(\dfrac{33-9}{4},0,3\right)=(6,0,3)$

b) Calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}=(-3,12,4)$.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=(-3,12,4)\cdot(4,0,3)=0\Rightarrow$ Son perpendiculares, luego, el triángulo es rectángulo en *P*.

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x+3y+2z=6$ con los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(1,0,0)$; $B=(0,2,0)$; $C=(0,0,3)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,2,0)$ y $\vec{AC}=(-1,0,3)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\, módulo\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{7}{2}\, u^2$$

Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$
a) Determina el valor de *t* para que *A, B, C* y *D* estén en un mismo plano.
b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por *A* y *B*, que contenga al punto *C*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación del plano que pasa por *A*, *B* y *C*. Para ello calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,1,-1)$ y $\vec{AC}=(1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x-1-y+1-z+1+2y-2=0 \Rightarrow x+y-z-1=0$$

Para que el punto *D* pertenezca al plano debe verificar la ecuación, luego:

$$x+y-z-1=0 \Rightarrow t-2-2-1=0 \Rightarrow t=5$$

b) Si es perpendicular al segmento *AB*, entonces el vector normal del plano es el vector $\vec{AB}=(-2,1,-1)$, luego, el plano tiene de ecuación: $-2x+y-z+D=0$.

Como queremos que pase por el punto *C*, debe verificar esa ecuación.

$$-2x+y-z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 2+1-2+D=0 \Rightarrow D=5$$

Luego el plano pedido es: $-2x+y-z+5=0$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,2,4)$ y la recta *r* definida por $\dfrac{x+2}{2}=y-1=\dfrac{z-1}{3}$
a) Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de *A* y de *B*.
b) Halla la ecuación del plano paralelo a *r* y que contiene a los puntos *A* y *B*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector $\vec{AB}=(-2,2,2)$ y hallamos el punto medio del segmento AB, $M=(0,1,3)$.

El plano perpendicular tiene de ecuación: $-2x+2y+2z+D=0$ y como tiene que pasar por el punto *M*, tenemos:

$$-2x+2y+2z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 3+D=0 \Rightarrow D=-8$$

Luego, el plano pedido es: $-2x+2y+2z-8=0 \Rightarrow -x+y+z-4=0$

b) Calculamos la recta que pasa por *A* y *B*: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+z-3=0 \end{array}\right\}$

Hallamos el haz de planos que contiene a dicha recta:

$$x+y-1+k(x+z-3)=0 \Rightarrow (1+k)x+y+kz-1-3k=0$$

El vector normal de dicho plano debe ser perpendicular al vector director de la recta *r*, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$(1+k,1,k)\cdot(2,1,3)=0 \Rightarrow 2+2k+1+3k=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

Luego, el plano pedido es:

$$x+y+1+k(x+z-3)=0 \Rightarrow x+y-1-\frac{3}{5}(x+z-3)=0 \Rightarrow 2x+5y-3z+4=0$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,2)$
a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices *A, B, C* y *D*.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por *D* y es perpendicular al plano que contiene a los puntos *A, B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,-3,1)$; $\vec{AC}=(-2,-1,1)$ y $\vec{AD}=(1,-2,1)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-5\right|=\frac{5}{6}\,u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

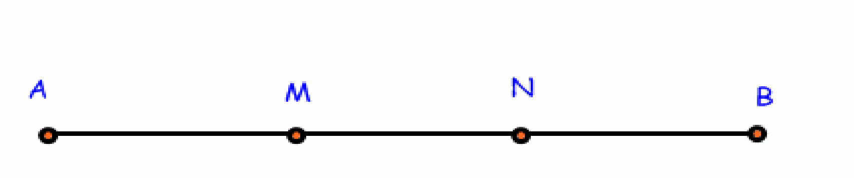
$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\,\vec{i}-\vec{j}-5\,\vec{k}=(-2,-1,-5)$$

La recta que nos piden es: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-5}$

Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$.
a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento *AB* en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento *AB* y que pasa por *A*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el vector: $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)$. Según la figura, se cumple que:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=(x-1,y-2,z-1)\Rightarrow M=\left(1-\frac{2}{3},2-\frac{2}{3},1+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

El punto *N* es el punto medio del segmento *MB*, luego:

$$N=\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2},\frac{\frac{4}{3}+0}{2},\frac{\frac{5}{3}+3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

b) El vector normal del plano es $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares al segmento *AB* es: $-2x-2y+2z+D=0$.
Como queremos el plano que pasa por el punto *A*, se debe verificar que:

$$-2\cdot 1-2\cdot 2+2\cdot 1+D=0\Rightarrow D=4$$

Luego, el plano pedido es: $-2x-2y+2z+4=0\Rightarrow -x-y+z+2=0$

Considera el plano π definido por $2x-y+nz=0$ y la recta r dada por $\dfrac{x-1}{m}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ con $m\neq 0$.
a) Calcula *m* y *n* para que la recta *r* sea perpendicular al plano π.
b) Calcula *m* y *n* para que la recta *r* esté contenida en el plano π.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector normal del plano $(2,-1,n)$ y el vector director de la recta $(m,4,2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{2}{m}=\frac{-1}{4}=\frac{n}{2}\Rightarrow m=-8\ ;\ n=-\frac{1}{2}$$

b) Si la recta está contenida en el plano, el punto $A=(1,0,1)$ de la recta debe pertenecer al plano, luego:

$$2\cdot 1-0+n\cdot 1=0\Rightarrow n=-2$$

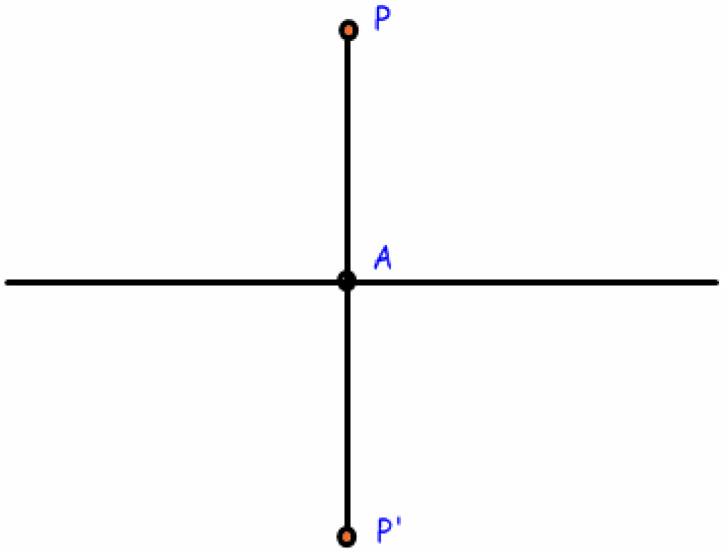
Además, si la recta está contenida en el plano, el vector normal del plano $(2,-1,n)$ y el vector director de la recta $(m,4,2)$, son perpendiculares, luego:

$$(2,-1,-2)\cdot(m,4,2)=0\Rightarrow 2m-4-4=0\Rightarrow m=4$$

Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



De la recta r sabemos: $A=(1+2t,3t,-1-t)$; $\vec{u}=(2,3,-1)$

Para calcular el simétrico del punto $P=(1,1,1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PA}=(2t,3t-1,-2-t)$ y el vector $\vec{u}=(2,3,-1)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PA}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(2t,3t-1,-2-t)\cdot(2,3,-1)=0\Rightarrow 4t+9t-3+2+t=0\Rightarrow t=\frac{1}{14}\Rightarrow A=\left(\frac{16}{14},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P+P'}{2}=A\Rightarrow\left(\frac{1+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(\frac{16}{14},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)\Rightarrow P'=\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},-\frac{22}{7}\right)$$

Sean los puntos $A(2,\lambda,\lambda)$, $B(-\lambda,2,0)$ y $C(0,\lambda,\lambda-1)$.
a) ¿Existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el que los puntos *A, B* y *C* estén alineados?. Justifica la respuesta.
b) Para $\lambda=1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices *A, B* y *C*. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos estén alineados, las coordenadas de los vectores $\vec{AB}=(-\lambda-2,2-\lambda,-\lambda)$ y $\vec{AC}=(-2,0,-1)$, deben ser proporcionales, luego:

$$\frac{-2}{-\lambda-2}=\frac{0}{2-\lambda}=\frac{-1}{-\lambda}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{-2}{-\lambda-2}=\dfrac{0}{2-\lambda}\Rightarrow\lambda=2\\ \dfrac{0}{2-\lambda}=\dfrac{-1}{-\lambda}\Rightarrow\lambda=2\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=2$$

b) El plano viene definido por el punto $A=(2,1,1)$ y los vectores $\vec{AB}=(-3,1,-1)$ y $\vec{AC}=(-2,0,-1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 & -2\\ y-1 & 1 & 0\\ z-1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+2+2y-2+2z-2-3y+3=0\Rightarrow -x-y+2z+1=0$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-1\cdot 0-1\cdot 0+2\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ u$$

Halla la ecuación del plano que es paralelo a *r* de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{array}\right.$ y contiene a la recta *s* definida por $\left\{\begin{array}{l} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right.$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{array}\right. \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=-11+2y \\ y=y \\ z=19-2y \end{array}\right.$

La recta *r*, viene definida por el punto $A=(-11,0,19)$ y el vector director $\vec{u}=(2,1,-2)$. La recta *s*, viene definida por el punto $B=(1,-2,2)$ y el vector director $\vec{v}=(-5,3,2)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto *B* y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -5 \\ y+2 & 1 & 3 \\ z-2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x+6y+11z-18=0$$

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x+y=1 \quad , \quad ay+z=0 \quad \text{y} \quad x+(1+a)y+az=a+1$$

a) ¿Cuánto ha de valer *a* para que no tengan ningún punto en común?.
b) Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}=a^2-a=0 \Rightarrow a=1 \; ; \; a=0$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$a=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a=1$	2	3	S. Incompatible
$a \neq 0 \; y \; 1$	3	3	S. Compatible Determinado

a) Para que los tres planos no tengan ningún punto en común tiene que ser $a=1$.

b) Para $a=0$, dos planos son coincidentes y el tercero los corta.