

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Calcula $\int_0^{\pi^2} \text{sen}(\sqrt{x}) dx$.

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $\sqrt{x} = t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

$$\text{Si } x = \pi^2 \Rightarrow \sqrt{\pi^2} = t \Rightarrow t = \pi$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = t \Rightarrow t = 0$$

Vamos a calcular cuanto vale dx :

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2t dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

$$\int_0^{\pi} 2t \cdot \text{sen } t dt = \left[-2t \cos t + 2 \int \cos t dt \right] = \left[-2t \cos t + 2 \text{sen } t \right]_0^{\pi} = (-2\pi \cos \pi + 2 \text{sen } \pi) - (2 \text{sen } 0) = 2\pi$$

$$u = 2t; du = 2 dt$$

$$dv = \text{sen } t dt; v = -\cos t$$

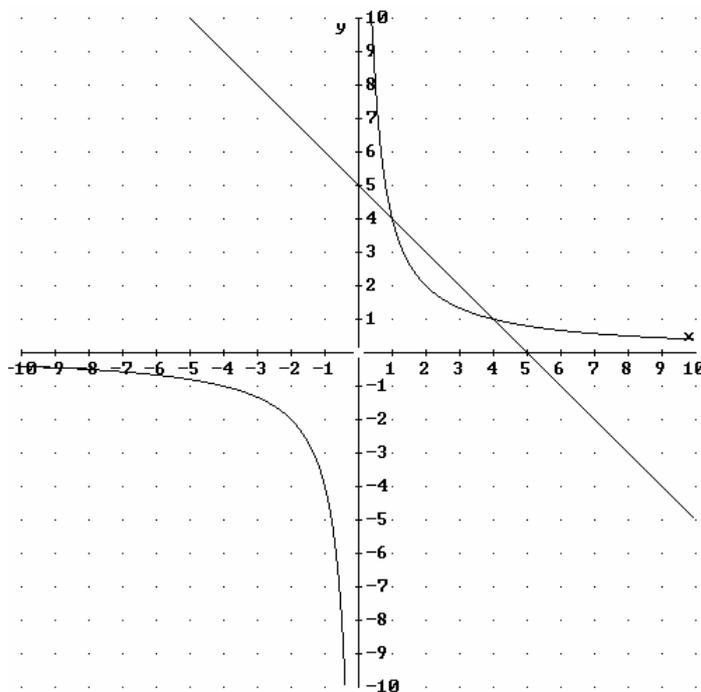
Considera la función f dada por $f(x) = 5 - x$ y la función g definida como $g(x) = \frac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

- a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.
 b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) La función $f(x) = 5 - x$ es una recta, luego podemos dibujarla fácilmente con una tabla de valores. La función $g(x) = \frac{4}{x}$ es una hipérbola, la podemos dibujar dando 3 ó 4 valores a la derecha y a la izquierda de 0.



Vemos que las dos funciones se cortan en los puntos $(1, 4)$ y $(4, 1)$

- b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x\right]_1^4 = (20 - 8 - 4 \ln 4) - \left(5 - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2} - 4 \ln 4 \text{ u}^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$

a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

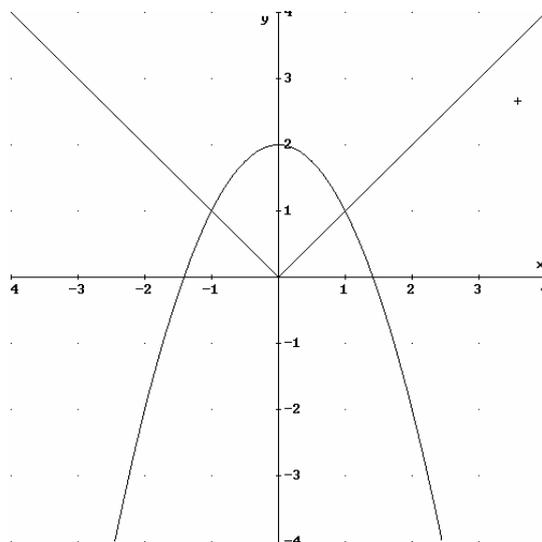
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = 2 - x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0, 2)$ y corta al eje X en los puntos $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

La función $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3º cuadrante.



b)

$$A = 2 \cdot \int_0^1 [(2 - x^2) - x] dx = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3} u^2$$

Dada la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$, donde \ln es la función logaritmo neperiano, se pide:

a) Comprueba que la recta de ecuación $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

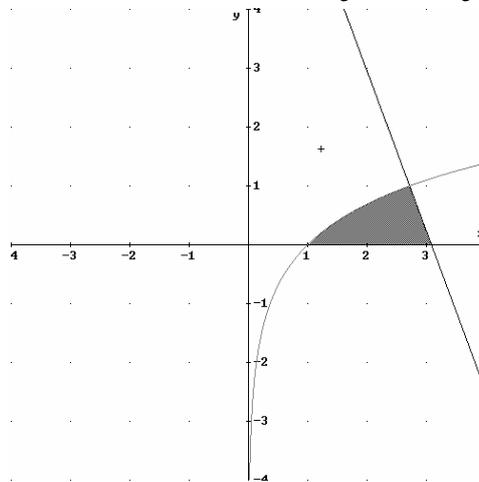
a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = \frac{1}{x}$

La ecuación de la recta normal es:

$$y - f(e) = -\frac{1}{f'(e)}(x - e) \Rightarrow y - \ln e = -\frac{1}{\frac{1}{e}}(x - e) \Rightarrow y - 1 = -e(x - e) \Rightarrow y = -ex + e^2 + 1$$

b) Calculamos el punto de corte de la normal con el eje X.

$$0 = -ex + e^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{e^2 + 1}{e} = e + \frac{1}{e}$$



El área que nos piden es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (\ln x) dx + \int_e^{e+\frac{1}{e}} (1 + e^2 - ex) dx = [x \ln x - x]_1^e + \left[x + e^2 x - \frac{ex^2}{2} \right]_e^{e+\frac{1}{e}} = \\ &= [(e - e) - (-1)] + \left[\left(e + \frac{1}{e} + e^2 \left(e + \frac{1}{e} \right) - \frac{e \left(e + \frac{1}{e} \right)^2}{2} \right) - \left(e + e^3 - \frac{e^3}{2} \right) \right] = 1 + \frac{1}{2e} u^2 \end{aligned}$$

Sea $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0) = 0$. (\ln denota logaritmo neperiano).

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$F(x) = \int \ln(x+2) dx = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) + C$$

$$u = \ln(x+2); du = \frac{1}{x+2} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

Calculamos el valor de la constante C .

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot \ln(0+2) - 0 + 2 \ln(0+2) + C \Rightarrow C = -2 \ln 2$$

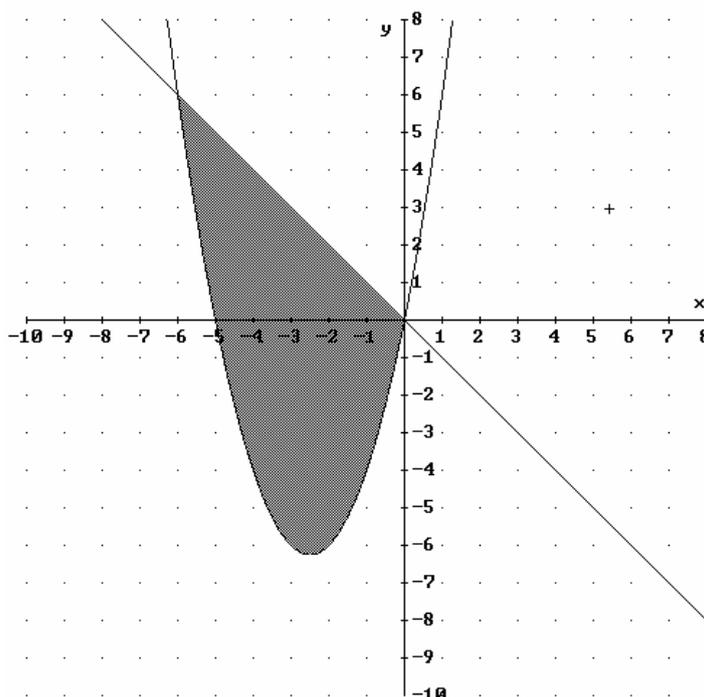
Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) - 2 \ln 2$

Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

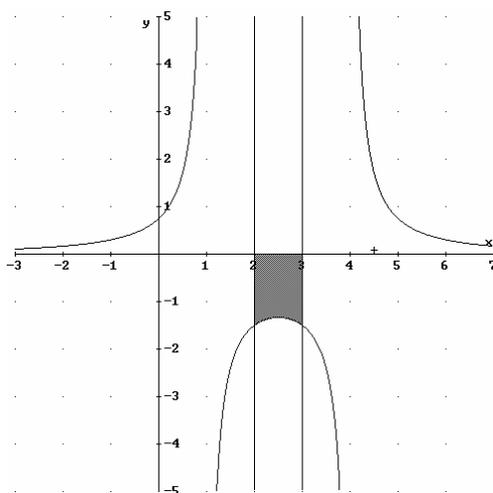
$$\left. \begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 + ax \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + (1+a)x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = -1-a.$$

$$\begin{aligned} 36 &= \int_{-1-a}^0 (-x - x^2 - ax) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_{-1-a}^0 = - \left[-\frac{(-1-a)^2}{2} - \frac{(-1-a)^3}{3} - \frac{a(-1-a)^2}{2} \right] = \\ &= \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{6} \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 216 \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a - 215 = 0 \Rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

Dada la función f definida por $f(x) = \frac{3}{x^2 - 5x + 4}$ para $x \neq 1$ y $x \neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$, $x = 3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de la gráfica.



Calculamos la integral $\int \frac{3}{x^2 - 5x + 4} dx$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 4$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = 1 \Rightarrow 3 = -3A \Rightarrow A = -1$$

$$x = 4 \Rightarrow 3 = 3B \Rightarrow B = 1$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-4} dx = -\ln|x-1| + \ln|x-4|$$

$$A = -\int_2^3 \frac{3}{x^2 - 5x + 4} = -\left[-\ln|x-1| + \ln|x-4|\right]_2^3 = -(-\ln 2 + \ln 1) + (-\ln 1 + \ln 2) = 2 \ln 2$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2-x|$.

a) Esboza su gráfica.

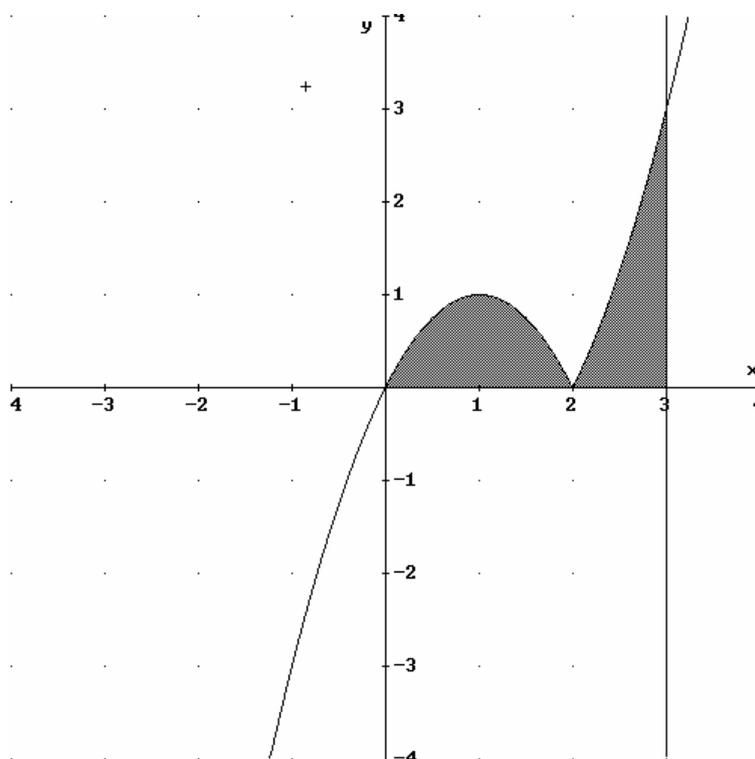
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 3$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x) = x|2-x| = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2-2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Hacemos el dibujo de las dos parábolas en sus intervalos.



b) Según vemos en la figura el área que nos piden es:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \\ &= \left[\left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - 0 \right] + \left[(9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \right] = \frac{8}{3} u^2 \end{aligned}$$

Sea la función f dada por $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$. Determina una primitiva F de f tal que $F(1) = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral $\int \frac{1}{x^2 + x} dx = \int \frac{1}{x(x+1)} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -B \Rightarrow B = -1$$

Con lo cual:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2 + x} dx = \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{(x+1)} dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

$$\text{Como } F(1) = 1 \Rightarrow 1 = \ln|1| - \ln|1+1| + C \Rightarrow C = 1 + \ln 2$$

Luego la primitiva que nos piden es: $F(x) = \ln|x| - \ln|x+1| + 1 + \ln 2$

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

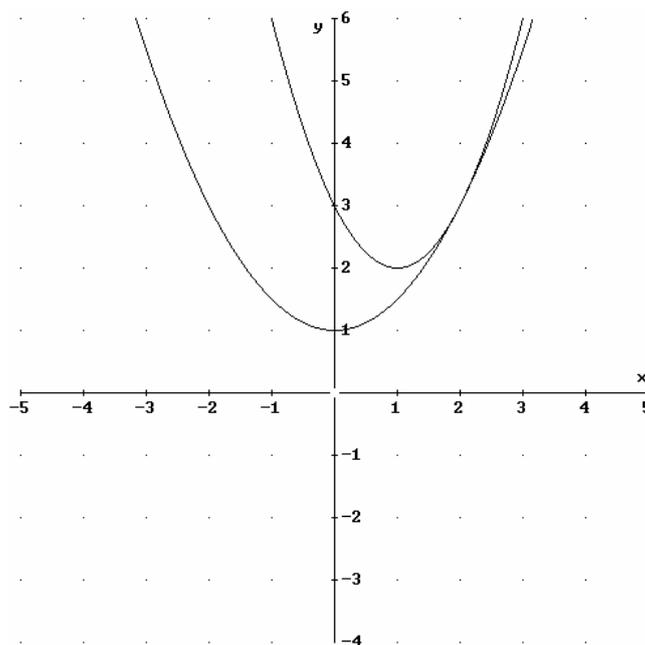
a) Esboza las gráficas de f y g , y halla su punto de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a) Dibujamos las dos parábolas.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

$$x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 1) dx = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \left(\frac{8}{6} - 4 + 4 \right) = \frac{8}{6} u^2$$

Sea Calcula $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}} dx$.

a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

b) Determina I .

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t^2 = e^{-x}$, vamos a calcular cuanto vale dx :

$$2t dt = -e^{-x} dx \Rightarrow dx = -\frac{2t dt}{e^{-x}} = -\frac{2t dt}{t^2} = -\frac{2 dt}{t}$$

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}} dx = \int \frac{5}{1+t} \left(-\frac{2}{t}\right) dt = \int \frac{-10}{t(1+t)} dt$$

b) Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-10}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t) + Bt}{t(1+t)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t = 0 \Rightarrow -10 = A \Rightarrow A = -10$$

$$t = -1 \Rightarrow -10 = -B \Rightarrow B = 10$$

Con lo cual:

$$\int \frac{-10}{t(1+t)} dt = \int \frac{-10}{t} dt + \int \frac{10}{1+t} dt = -10 \ln |t| + 10 \ln |1+t| = -10 \ln \left| \sqrt{e^{-x}} \right| + 10 \ln \left| 1 + \sqrt{e^{-x}} \right| + C$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

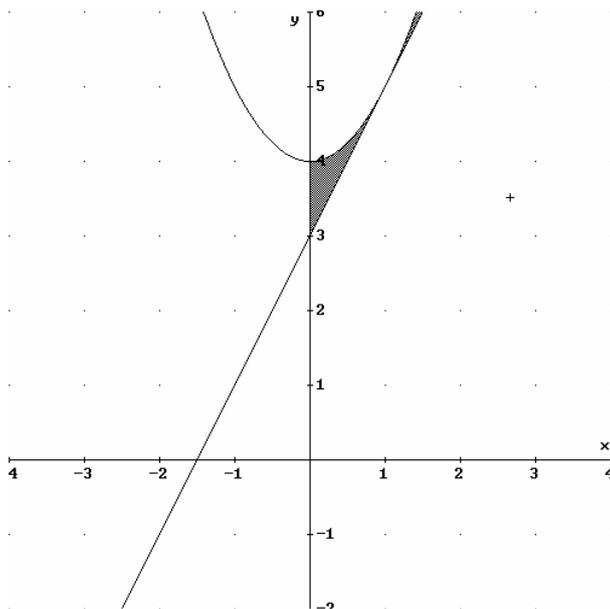
a) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$.

$$f(1) = 1 + 4 = 5$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

Sustituyendo, tenemos: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 5 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x + 3$

b) Hacemos el dibujo del recinto.



El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^1 (x^2 + 4 - 2x - 3) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) = \frac{1}{3} u^2$$