PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2012

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=\lambda+1 \\ 3y+2z=2\lambda+3 \\ 3x+(\lambda-1)y+z=\lambda \end{array}\right\}$

a) Resuelve el sistema para $\lambda=1$.
b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.
c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$?.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 3.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

b) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix}=3+6-9-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda=1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq1$	3	3	S. Compatible Determinado

Luego, el sistema tiene solución única si $\lambda\neq1$ **.**

a) Vamos a resolverlo para $\lambda=1\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-t}{3} \\ y=\dfrac{5-2t}{3} \\ z=t \end{array}\right.$

c) Sustituimos la solución en el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=\lambda+1 \\ 3\cdot0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2\lambda+3 \\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(\lambda-1)\cdot0+\frac{1}{2}=\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \\ \lambda=-1 \end{array}\right\}$$

Luego, vemos que para $\lambda=-1$, la solución del sistema es: $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} kx+2y &= 3 \\ -x \quad +2kz &= -1 \\ 3x-y-7z &= k+1 \end{aligned}\right\}$

a) Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro *k*.
b) Resuélvelo para $k=1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2k^2+12k-14=0 \Rightarrow k=1 \; ; \; k=-7$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k=-7$	2	3	S. Incompatible
$k\neq 1$ y -7	3	3	S. Compatible Determinado

b) $k=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=3 \\ -x+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y&=3 \\ -x \quad &=-1-2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+\quad y\quad +\ z=\ 2 \\ x-\quad 2y\quad -\ z=k+1 \end{array}\right\}$

a) Clasifícalo según los distintos valores de *k*.

b) Resuélvelo para $k=2$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = k^2-2k=0 \Rightarrow k=0\ ;\ k=2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=0$	2	3	S. Incompatible
$k=2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k\neq 0\ y\ 2$	3	3	S. Compatible determinado

b) $k=2\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ 2x+y+\ z=\ \ 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=-1-2z \\ 2x+y=2-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{7-z}{5} \\ y=\dfrac{-4-3z}{5} \\ z=z \end{array}\right.$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x + ky + 2z = k+1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ (k+1)x + y + z = k+2 \end{array}\right\}$

a) Determina los valores de *k* para los que el sistema tiene más de una solución.
b) ¿Existe algún valor de *k* para el cual el sistema no tiene solución?.
c) Resuelve el sistema para $k = 0$
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 6k = 0 \Rightarrow k = 0 \ ; \ k = 2 \ ; \ k = -3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k = 2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k = -3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 0, 2 \ y -3$	3	3	S. Compatible determinado

b) No hay ningún valor de *k* para el cual el sistema no tenga solución.

c) $k = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 1 \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 - 2z \\ x + 2y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2z \\ y = 1 + z \\ z = z \end{array}\right.$$

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro?. ¿Y el de la calculadora?. Razona las respuestas.
b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos $x =$ Precio del libro, $y =$ Precio de la calculadora, $z =$ Precio del estuche
Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2y+2z=114 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=114 \Rightarrow x=38\text{ €}$$

Luego, el precio del libro es 38 €.
Vamos a ver si podemos calcular el precio de la calculadora:

$$\left.\begin{array}{l} 38+y+z=57 \\ 38-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=19 \\ -2y-2z=-38 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No podemos, ya que es un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) Planteamos el sistema con la nueva ecuación que nos dan y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0'5x+0'8y+0'75z=34 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 50x+80y+75z=3400 \end{array}\right\} \Rightarrow x=38\text{ €};\ y=15\text{ €};\ z=4\text{ €}$$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+kz=1 \\ 2x+ky\qquad =1 \\ y+2z=k \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro *k*.
b) Resuélvelo para $k=1$.
c) Resuélvelo para $k=-1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k+2k-4=0 \Rightarrow k=1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k\neq 1$	3	3	S. Compatible determinado

b) $k=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1-z \\ 2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=1-2z \\ z=z \end{array}\right.$$

c) $k=-1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y-z=\ \ 1 \\ 2x-y\qquad =\ \ 1 \\ y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ;\ y=0\ ;\ z=-\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} kx+2y &= 2 \\ 2x+ky &= k \\ x-y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{aligned} kx+2y &= 2 \\ 2x+ky &= k \\ x-y &= -1 \end{aligned}\right\}$

a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro *k*.
b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) Halla las soluciones en cada caso.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz ampliada del sistema

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -k^2+2k-4-2k+4+k^2 = 0$$

Luego, el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y el sistema siempre es compatible para cualquier valor del parámetro *k*.

b) Calculamos el determinante

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2-4=0 \Rightarrow k = \pm 2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=2$	2	2	S. Compatible Determinado
$k=-2$	1	1	S. Compatible Indeterminado
$k \neq 2 \text{ y } -2$	2	2	S. Compatible Determinado

Resolvemos el sistema para $k=-2$.

$$-2x+2y = 2\} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{2+2x}{2} = 1+x \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para $k \neq -2$.

$$\left.\begin{aligned} kx+2y &= 2 \\ 2x+ky &= k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ k & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{k^2-4} = 0 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}} = \dfrac{k^2-4}{k^2-4} = 1 \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas $\left.\begin{array}{r} x \quad - y \qquad = \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z = \lambda \\ - x - y + \lambda z \ = 0 \end{array}\right\}$

a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ ; \ \lambda = -1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	1	1	S. Compatible indeterminado
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq 0 \ y \ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$.

$$x - y \ = 0 \} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Resolvemos el sistema para $\lambda = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} x - y \ = -1 \\ -2y - z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ y = y \\ z = 1 - 2y \end{cases}$$