

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una función primitiva de f tal que , $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcula:

a) $\int_2^3 f(x) dx$

b) $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx$

c) $\int_2^3 (F(x))^2 \cdot f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $\int_2^3 f(x) dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = 2 - 1 = 1$

b) $\int_2^3 (5f(x) - 7) dx = 5 \int_2^3 f(x) dx - 7 \int_2^3 dx = 5 \cdot 1 - 7 \cdot [x]_2^3 = 5 - 7(3 - 2) = -2$

c) $\int_2^3 (F(x))^2 \cdot f(x) dx = \left[\frac{(F(x))^3}{3} \right]_2^3 = \frac{(F(3))^3}{3} - \frac{(F(2))^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Sea la función f definida por $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

a) Halla una primitiva de f .

b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln 2$, donde \ln denota el logaritmo neperiano.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las raíces del denominador son: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

Con lo cual:
$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{-1}{x + 1} dx = \ln(x - 1) - \ln(x + 1) + C$$

b)

$$A = \ln 2 = \int_2^k \frac{2}{x^2 - 1} dx = [\ln(x - 1) - \ln(x + 1)]_2^k = \ln \frac{k - 1}{k + 1} + \ln 3$$

Resolvemos la ecuación logarítmica:

$$\ln 2 = \ln \frac{k - 1}{k + 1} + \ln 3 \Rightarrow \ln \frac{2}{3} = \ln \frac{k - 1}{k + 1} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{k - 1}{k + 1} \Rightarrow 2k + 2 = 3k - 3 \Rightarrow k = 5$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \text{cos } x$, respectivamente.

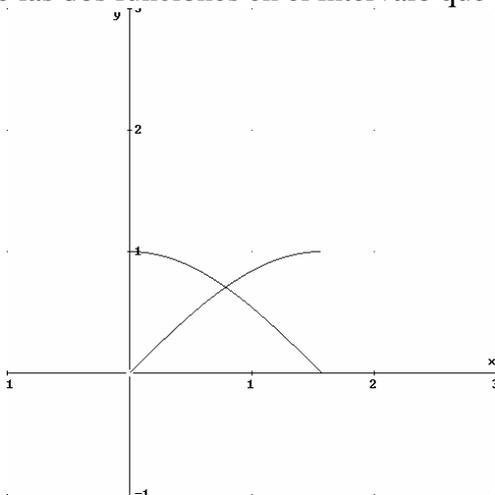
a) Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

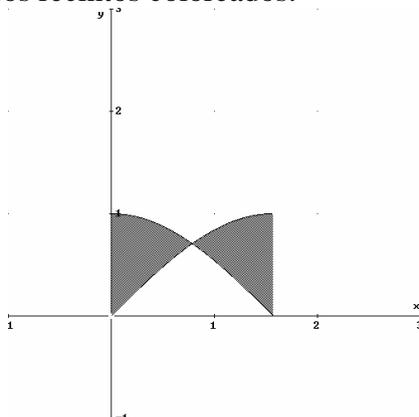
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones en el intervalo que nos dan:



b) El área que nos piden son los dos recintos coloreados:



Calculamos el área

$$\begin{aligned} \text{Área} &= A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \text{sen } x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen } x - \cos x) dx = [\text{sen } x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \text{sen } x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left[\text{sen } \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right] - [\text{sen } 0 + \cos 0] + \left[-\cos \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{2} \right] - \left[-\cos \frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

Sea f la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos x$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x) = \int x^2 \cos x dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \cdot \operatorname{sen} x dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left[-x \cdot \cos x + \int \cos x dx \right] = \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2; \quad du = 2x dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$F(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

Como nos piden una primitiva que pase por $(\pi, 0) \Rightarrow F(\pi) = 0$, luego sustituyendo podemos calcular el valor de C .

$$0 = \pi^2 \cdot \operatorname{sen} \pi + 2\pi \cdot \cos \pi - 2 \operatorname{sen} \pi + C \Rightarrow 0 = -2\pi + C \Rightarrow C = 2\pi$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $F(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + 2\pi$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = x^3 - 4x$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

c) Calcula el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

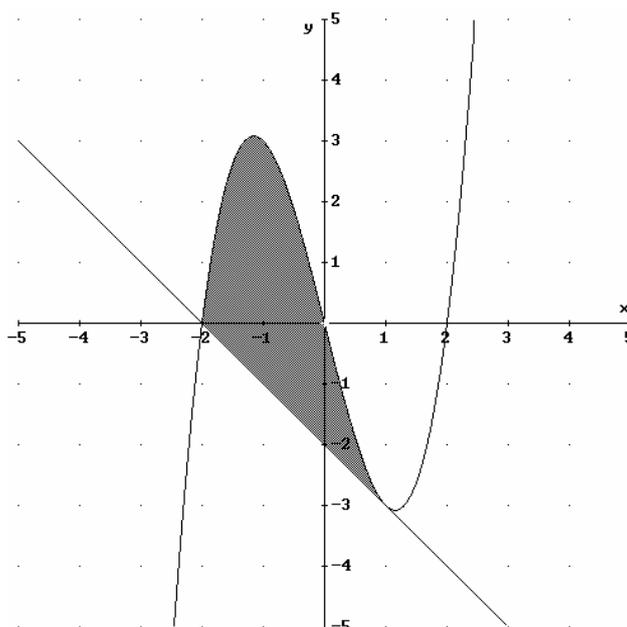
a) La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = -3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'(1) = 3(1)^2 - 4 = -1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 3 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x - 2$

b) Hacemos un esbozo.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^3 - 4x = -x - 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -2$$

Luego, los puntos de corte son: $(1, -3)$ y $(-2, 0)$

c)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(x^3 - 4x) - (-x - 2)] dx = \int_{-2}^1 [x^3 - 3x + 2] dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4 \right) = \frac{27}{4} u^2 \end{aligned}$$

Sea $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$, respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

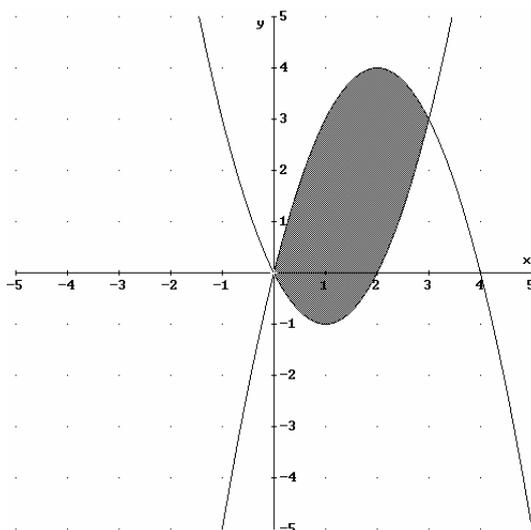
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(3,3)$

Hacemos un esbozo.



b)

$$A = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 [-2x^2 + 6x] dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right]_0^3 = \left(-\frac{54}{3} + \frac{54}{2} \right) - (0) = 9u^2$$

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

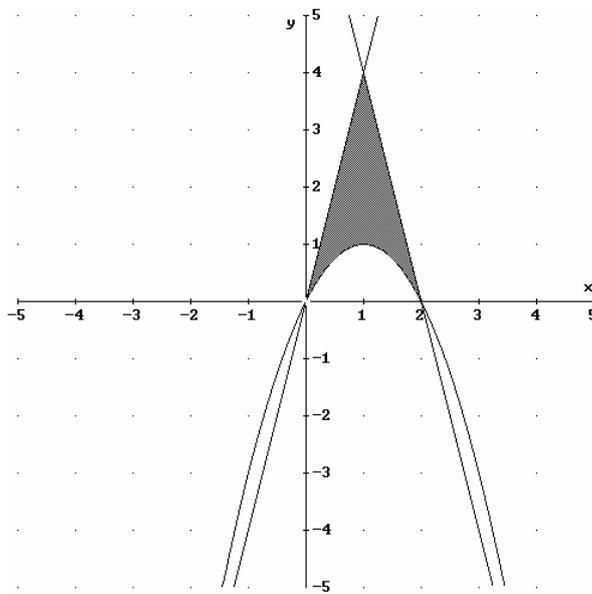
a) Realiza un esbozo de dicho recinto.

b) Calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Hacemos un esbozo.



$$b) A = 2 \cdot \int_0^1 [(4x) - (2x - x^2)] dx = 2 \cdot \int_0^1 [2x + x^2] dx = 2 \cdot \left[\frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{8}{3} u^2$$

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + b \ln(x)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^4 f(x) dx = 27 - 8 \ln 4$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como tiene un extremo relativo en $x = 1$, se cumple que $f'(1) = 0$, luego:

$$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x} \Rightarrow f'(1) = 2a \cdot 1 + \frac{b}{1} = 0 \Rightarrow b = -2a$$

Calculamos la integral: Previamente calculamos por partes la integral de $\ln(x)$

$$f(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x$$

$$\int_1^4 ax^2 - 2a \ln(x) dx = \left[\frac{ax^3}{3} - 2a(x \ln x - x) \right]_1^4 = \left(\frac{64a}{3} - 8a \ln 4 + 8a \right) - \left(\frac{a}{3} + 2a \right) = 27 - 8a \ln 4 \Rightarrow a = 1$$

Luego, los valores son: $a = 1$; $b = -2$

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2; \quad du = -2x \, dx \\ dv &= e^{-x} \, dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$I = \int (1 - x^2)e^{-x} \, dx = -e^{-x} \cdot (1 - x^2) - 2 \int x \cdot e^{-x} \, dx$$

Volvemos a hacer la integral que nos queda por partes.

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= e^{-x} \, dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= -e^{-x} \cdot (1 - x^2) - 2 \int x \cdot e^{-x} \, dx = -e^{-x} \cdot (1 - x^2) - 2 \left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \, dx \right] = \\ &= -e^{-x} \cdot (1 - x^2) + 2xe^{-x} + 2e^{-x} + C = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1) + C \end{aligned}$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(-1, 0)$.

$$F(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1) + C \Rightarrow F(-1) = 0 \Rightarrow F(-1) = -e^{-1}(1 - 2 + 1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 1)$

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ respectivamente.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

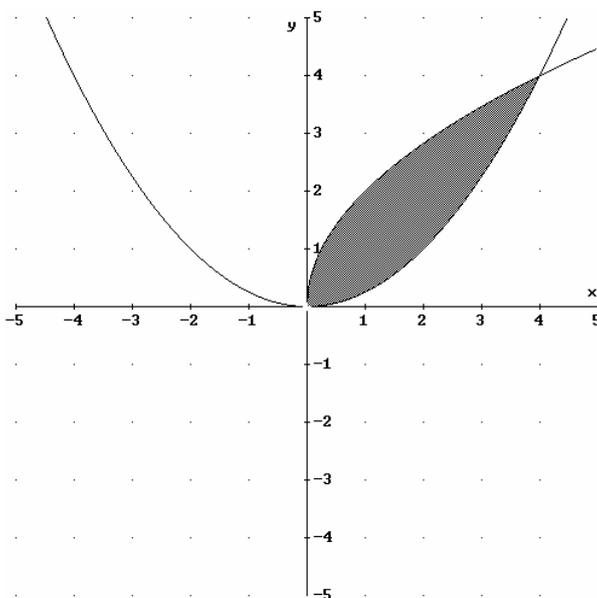
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$\frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{x^4}{16} = 4x \Rightarrow x^4 - 64x \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(4,4)$

Hacemos un esbozo.



$$b) A = \int_0^4 \left[(2\sqrt{x}) - \left(\frac{x^2}{4}\right) \right] dx = \int_0^4 \left[2x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{4} \right] dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \left(\frac{2\sqrt{64}}{\frac{3}{2}} - \frac{64}{12} \right) - (0) = \frac{16}{3} u^2$$

$$\text{Sea } I = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{1-x}} dx.$$

a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$.

b) Calcula el valor de I .

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t = \sqrt{1-x}$, vamos a calcular cuanto vale dx :

$$dt = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} dx = \frac{-1}{2t} dx \Rightarrow dx = -2t dt$$

$$t = \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 1-x \Rightarrow x = 1-t^2$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I = \int_1^0 \frac{(1-t^2)}{1+t} \cdot (-2t dt) = \int_1^0 \frac{(1+t)(1-t)}{1+t} \cdot (-2t dt) = \int_1^0 -2t(1-t) dt = \int_1^0 (-2t + 2t^2) dt$$

b) Calculamos el valor de I

$$I = \int_1^0 (-2t + 2t^2) dt = \left[-\frac{2t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} \right]_1^0 = 0 - \left(-1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

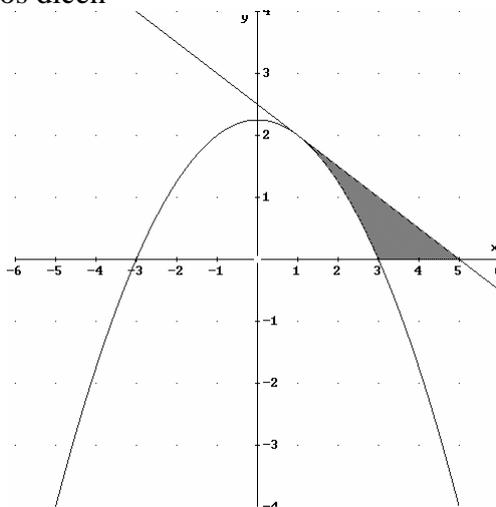
Calculamos: $f(1) = \frac{9-1}{4} = 2$

$$f'(x) = \frac{-2x}{4} = \frac{-x}{2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos el área del recinto

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \left(\frac{5-x}{2} - \frac{9-x^2}{4} \right) dx + \int_3^5 \left(\frac{5-x}{2} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{4} \right) dx + \int_3^5 \left(\frac{5-x}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{\frac{x^3}{3} - x^2 + x}{4} \right]_1^3 + \left[\frac{5x - \frac{x^2}{2}}{2} \right]_3^5 = \left(\frac{9-9+3}{4} \right) - \left(\frac{\frac{1}{3}-1+1}{4} \right) + \left(\frac{25-\frac{25}{2}}{2} \right) - \left(\frac{15-\frac{9}{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} u^2 \end{aligned}$$