

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la

recta dada por: $s \equiv \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

b) Calcula, para $a = 1$, la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta s .

$$s \equiv \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -ax + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = at \end{cases} \Rightarrow \vec{u}(1, 2, a)$$

Como las rectas son paralelas, las componentes de los vectores directores de ambas rectas deben ser proporcionales

$$\frac{a}{1} = \frac{2a}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \pm 1$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1,0,0)$ a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (1,0,0)$

$$x + 2y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow x + 2y + z - 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = -2 + 2t \\ z = t \end{array} \right\} \Rightarrow t + 2(-2 + 2t) + t - 1 = 0 \Rightarrow 6t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{6}$$

Luego, el punto de corte es el $B = \left(\frac{5}{6}, -2 + \frac{10}{6}, \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$. La distancia entre las rectas viene

dada por el módulo del vector $\vec{AB} = \left(\frac{5}{6} - 1, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right)$, luego:

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ u}$$

Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.

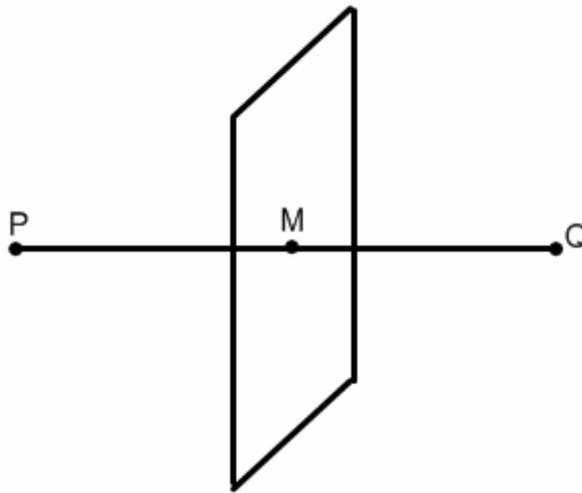
a) Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.

b) Calcula la distancia de P a π .

MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento PQ y que pasa por su punto medio M .



El vector $\vec{PQ} = (-2, -2, 0)$ es el vector normal del plano, luego:

$$-2x - 2y + D = 0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M = (1, 2, 1)$, tenemos que el plano pedido es:

$$-2x - 2y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow -2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

b) La distancia de P a π es el módulo del vector $\vec{PM} = (-1, -1, 0)$, luego:

$$d(P, \pi) = \left| \vec{PM} \right| = \sqrt{2} u$$

Calcula la distancia entre las rectas: $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Vemos que las dos rectas son paralelas pues tienen el mismo vector director $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (0, 0, 0)$ de la recta r a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (0, 0, 0)$

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + s + 2 + s + 3 + s = 0 \Rightarrow 3s + 6 = 0 \Rightarrow s = -2$$

Luego, el punto de corte es el $B = (1 - 2, 2 - 2, 3 - 2) = (-1, 0, 1)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AB} = (-1, 0, 1)$, luego:

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \, u$$

Considera las rectas: $r \equiv x = y = z$ $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

Halla la ecuación de la recta que corta a r y a s y es paralela a t .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si pasamos a paramétricas las rectas r y s , vemos que: cualquier punto de la recta r tiene de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tiene de coordenadas $B = (2, 1, s)$.

El vector $\vec{AB} = (2-t, 1-t, s-t)$ tiene que ser paralelo al vector director de la recta t $\vec{u} = (2, 3, 1)$, luego, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2-t}{2} = \frac{1-t}{3} = \frac{s-t}{1} \Rightarrow t = 4 ; s = 3$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{1}$

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.

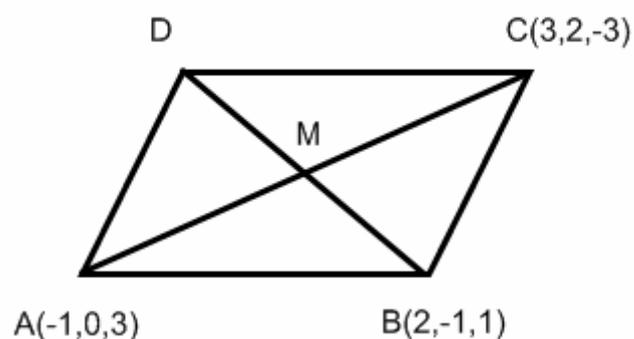
a) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

b) Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.

c) Calcula las coordenadas del vértice D .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (3, -1, -2)$ y $\vec{AC} = (4, 2, -6)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y & -1 & 2 \\ z-3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

b) La recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-6}$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{(-1,0,3) + (3,2,-3)}{2} = (1,1,0)$$
$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (1,1,0) = \frac{(2,-1,1) + (a,b,c)}{2} \Rightarrow D = (0,3,-1)$$

Considera los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,0,4)$.

a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\vec{AB} = 3\vec{AM}$, y como $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$ y $\vec{AM} = (x-1, y-2, z-3)$, obtenemos: $(-2, -2, 1) = (3x-3, 3y-6, 3z-9) \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}; z = \frac{10}{3}$, es

decir el punto M es $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB , es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}, \frac{\frac{4}{3}+0}{2}, \frac{\frac{10}{3}+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

b) El vector $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$ es el vector normal del plano, luego, $-2x - 2y + z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto A :

$$-2x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2x - 2y + z + 3 = 0$

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.

a) Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r .

b) Calcula la distancia de A a r .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como A y B son simétricos respecto de r , el punto medio M del segmento AB pertenece a la recta r

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal del plano que contiene a los tres puntos

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, 0, 4)$$

El vector director (a, b, c) de la recta r tiene que ser perpendicular al vector normal del plano, luego:

$$2a + 4c = 0$$

También tiene que ser perpendicular al vector $\vec{AB} = (-2, -2, 1)$, luego: $-2a - 2b + c = 0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones sale que: $a = -2c$; $b = \frac{5c}{2}$; $c = c$. Vemos que hay infinitas soluciones, si damos a c el valor 2, el vector director de la recta es: $(-4, 5, 2)$. Por lo tanto, la

ecuación de la recta que nos piden es: $\frac{x}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-\frac{3}{2}}{2}$

b) La distancia de A a la recta r es el módulo del vector $\vec{AM} = \left(-1, -1, \frac{1}{2}\right)$, luego:

$$d = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} u \text{ AM}$$

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r .

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 5x-10 = 3y-9 \\ x-2 = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y = 1 \\ x-3z = 2 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 5 \\ 5x - 3y = 1 \\ x - 3z = 2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la

matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (2, 3, 0) \\ \vec{u} = (-3, 5, 1) \end{cases} ; \quad s \equiv \begin{cases} B = (1, 0, 5) \\ \vec{v} = (-1, 1, 0) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{14}{\sqrt{6}} = 5,71u$$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ y por tanto podemos tomar como punto genérico de la

recta $P = (1 + 3t, 2t, -1 + t)$.

Calculamos la ecuación general del plano $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$

Como piden los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2 , tenemos que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, luego:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|1 + 3t - 2t - 3 + 3t + 2|}{\sqrt{11}} = \frac{|1 + 3t - 2t - 3 + 3t + 5|}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{|4t|}{\sqrt{11}} = \frac{|4t + 3|}{\sqrt{11}} \Rightarrow |4t| = |4t + 3|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$4t = -4t - 3 \Rightarrow t = -\frac{3}{8} \Rightarrow P = \left(\frac{5}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{11}{8} \right)$$

$$4t = 4t + 3 \Rightarrow 3 = 0 \Rightarrow \text{Absurdo}$$

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.

a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.

b) Calcula el área de dicho rectángulo.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB} = (-1, -1, 0)$; $\vec{AC} = (1, -3, -2)$ y $\vec{AD} = (2, -2, -2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los 4 puntos están en un mismo plano.}$$

Si los cuatro puntos forman un rectángulo



Los vectores \vec{AB} y \vec{AD} tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores \vec{AB} y \vec{BC} tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores \vec{AB} y \vec{DC} tienen que tener el mismo módulo $\Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{DC}| = \sqrt{2} \Rightarrow$ Cierto

Luego forman un rectángulo.

c) Área = $|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{6} u^2$

Considera el plano π de ecuación $2x + y + 3z - 6 = 0$.

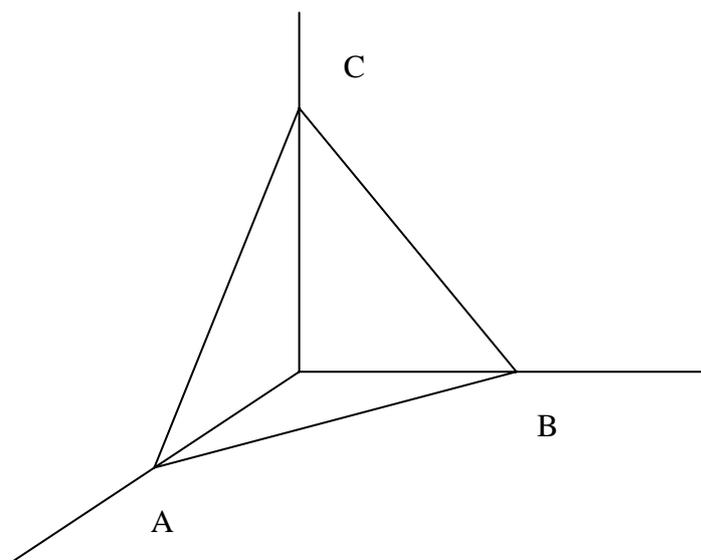
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A = (3, 0, 0)$; $B = (0, 6, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (-3, 6, 0)$; $\vec{AC} = (-3, 0, 2)$. El área pedida es:

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (12\vec{i} + 6\vec{j} + 18\vec{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{504} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \text{ u}^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{OA} = (3, 0, 0)$; $\vec{OB} = (0, 6, 0)$ y $\vec{OC} = (0, 0, 2)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |36| = 6 \text{ u}^3$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene a A , B y C

b) Halla el punto simétrico de D respecto del plano $x - y - 5z + 9 = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (-2, 3, -1)$; $\vec{AC} = (1, 1, 0)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x - y - 5z + 9 = 0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 4-5t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x - y - 5z + 9 = 0 \Rightarrow 1 + t + t - 20 + 25t + 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{27}$$

luego, el punto es: $M = \left(1 + \frac{10}{27}, -\frac{10}{27}, 4 - \frac{50}{27}\right) = \left(\frac{37}{27}, -\frac{10}{27}, \frac{58}{27}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento DD' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto D' , se debe verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{2} &= \frac{37}{27} \Rightarrow a = \frac{47}{27} \\ \frac{0+b}{2} &= -\frac{10}{27} \Rightarrow b = -\frac{20}{27} \\ \frac{4+c}{2} &= \frac{58}{27} \Rightarrow c = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Luego el simétrico es: $D' = \left(\frac{47}{27}, -\frac{20}{27}, \frac{8}{27}\right)$