

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x + 4$$

a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por gráficas de f y g .

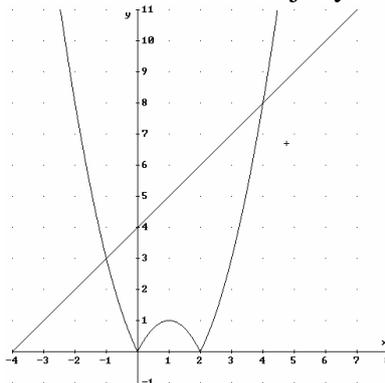
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función $f(x)$, para que nos resulte más sencillo dibujarla y después calcular el área que nos piden.

$$f(x) = |x(x-2)| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ son tres ramas de parábola fáciles de dibujar y la función $g(x)$ es una recta.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x + 4 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 4$$

Luego, los puntos de corte son: $(-1, 3)$ y $(4, 8)$

b) Calculamos el área.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [(x+4) - (x^2 - 2x)] dx + \int_0^2 [(x+4) - (-x^2 + 2x)] dx + \int_2^4 [(x+4) - (x^2 - 2x)] dx = \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + 3x + 4) dx + \int_0^2 (x^2 - x + 4) dx + \int_2^4 (-x^2 + 3x + 4) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_2^4 = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6} u^2 \end{aligned}$$

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).
Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $g(x)$, por partes:

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \cdot \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$$

$$\begin{aligned} u &= \ln(1+x^2); & du &= \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv &= dx; & v &= x \end{aligned}$$

La integral que nos queda es una integral racional, hacemos la división y nos queda:

$$\begin{aligned} \int \ln(1+x^2) dx &= x \cdot \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \cdot \ln(1+x^2) - \int 2 dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx = \\ &= x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

De todas las primitivas de $g(x)$

$$G(x) = x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$G(0) = 0 \cdot \ln(1+0^2) - 2 \cdot 0 + 2 \operatorname{arctg} 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $G(x) = x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x$

De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d .
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c ; f''(x) = 6ax + 2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

- Punto de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} \text{Pasa por } (0,0) \Rightarrow d = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

- $\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3 + cx)dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} \right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{c}{2} = \frac{5}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a = -1 ; b = 0 ; c = 3 ; d = 0$

Calcula $\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular primero la integral indefinida, que es una integral racional y, como el numerador y el denominador tienen igual grado, lo que hacemos es la división de los dos polinomios y la descomponemos en:

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = \int 1 dx + \int \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5} dx = x + \int \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = 5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 5} = \frac{A(x - 5) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 1 = -4A \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$x = 5 \Rightarrow 25 = 4B \Rightarrow B = \frac{25}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = x + \int \frac{6x - 5}{x^2 - 6x + 5} dx = x + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x - 1} dx + \int \frac{\frac{25}{4}}{x - 5} dx = x - \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{25}{4} \ln|x - 5|$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_2^4 \frac{x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = \left[x - \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{25}{4} \ln|x - 5| \right]_2^4 = \left(4 - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{25}{4} \ln 1 \right) - \left(2 - \frac{1}{4} \ln 1 + \frac{25}{4} \ln 3 \right) = 2 - \frac{13}{2} \ln 3$$

Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}} dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = t &\Rightarrow x = t^2 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$I = \int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2+1}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t^3+2t}{1+t} dt$$

Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I = \int \frac{2t^3+2t}{1+t} dt = \int \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{1+t} \right) dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4 \ln|1+t| = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln|1+\sqrt{x}| + C$$

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln x|$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).

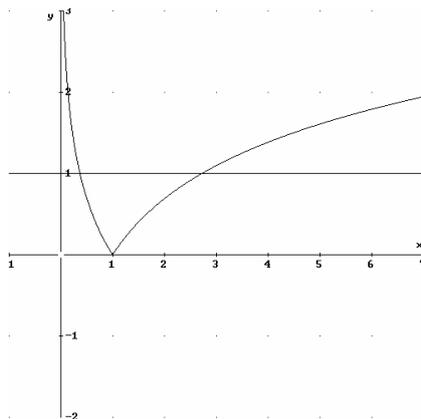
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

b) Calcula el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \Rightarrow x = e \\ -\ln x = 1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^1 [1 - (-\ln x)] dx + \int_1^e [1 - (\ln x)] dx = [x + x \ln x - x]_{\frac{1}{e}}^1 + [x - x \ln x + x]_{\frac{1}{e}}^e = \frac{1}{e} + e - 2$$

Recuerda que la integral de $\ln x$ es por partes:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln x; du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = t &\Rightarrow x = t^2 \\ dx &= 2t \, dt\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{t + t^2} dt = \int \frac{2}{1+t} dt = 2 \ln|1+t| = 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + C$$

Calculamos la que pasa por el punto $P(1,0)$

$$0 = 2 \ln|1 + \sqrt{1}| + C \Rightarrow C = -2 \ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $2 \ln|1 + \sqrt{x}| - 2 \ln 2$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(2x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x) = \int x \operatorname{sen}(2x) dx$, que es una integral por partes.

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(2x) dx = \left[-x \cdot \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} 2x dx; \quad v = -\frac{\cos 2x}{2}$$

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g .

b) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.

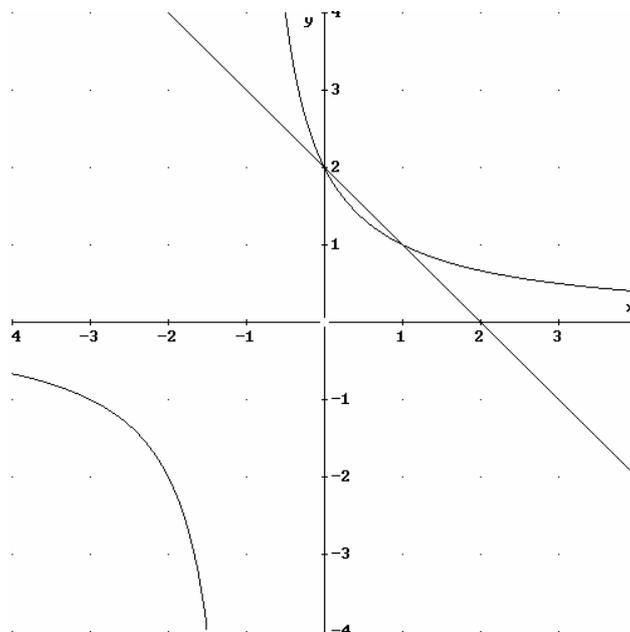
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

a) Igualamos las dos funciones para calcular los puntos de corte

$$2 - x = \frac{2}{x+1} \Rightarrow -x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 1$$

b) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



c) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_0^1 \left[(2-x) - \left(\frac{2}{x+1} \right) \right] dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln|x+1| \right]_0^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \right) - (0) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$$

Calcula $\int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{e^x}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{e^x} = t &\Rightarrow e^x = t^2 \\ e^x dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $x = 2 \Rightarrow t = e$
 $x = 4 \Rightarrow t = e^2$

Con lo cual:

$$\begin{aligned}I &= \int_2^4 \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x}} dx = \int_e^{e^2} \frac{2t}{1+t} dt = \int_e^{e^2} \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = \left[2t - 2\ln|1+t|\right]_e^{e^2} = \\ &= 2e^2 - 2e + 2\ln \frac{1+e}{1+e^2} = 14'15\end{aligned}$$

a) Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x) = \int (2x+1) \cdot e^{-x} dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{array}{l} u = 2x+1; \quad du = 2 dx \\ dv = e^{-x} dx; \quad v = -e^{-x} \end{array}$$

$$f(x) = \int (2x+1) \cdot e^{-x} dx = -(2x+1) \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -(2x+1) \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + C$$

Como su gráfica pasa por el origen de coordenadas, se cumple que:

$$f(0) = 0 \Rightarrow -(2 \cdot 0 + 1) \cdot e^{-0} - 2 \cdot e^{-0} + C = 0 \Rightarrow C = 3$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x) = -(2x+1) \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + 3$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x = 0$.

$$- x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$- f'(0) = (2 \cdot 0 + 1) e^{-0} = 1$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$.

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 4$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g , la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcula el área de este recinto.

MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

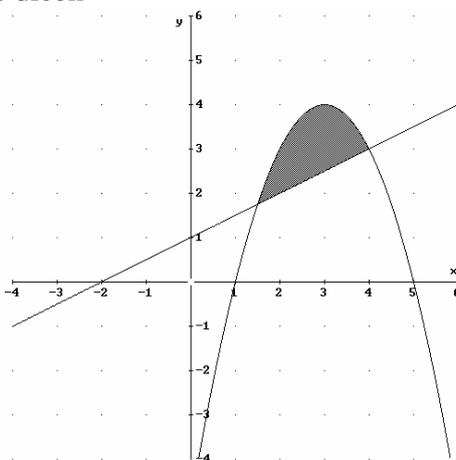
a) La ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x = 4$ es: $y - g(4) = -\frac{1}{g'(4)} \cdot (x - 4)$

Calculamos: $g(4) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 5 = 3$

$$g'(x) = -2x + 6 \Rightarrow g'(4) = -2$$

Sustituyendo, tenemos: $y - g(4) = -\frac{1}{g'(4)} \cdot (x - 4) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$-x^2 + 6x - 5 = \frac{x + 2}{2} \Rightarrow -2x^2 + 11x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{-4} = \frac{-11 \pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \\ x = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

Calculamos el área del recinto

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{3}{2}}^4 \left((-x^2 + 6x - 5) - \frac{x + 2}{2} \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^4 \left(-x^2 + \frac{11x}{2} - 6 \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{4} - 6x \right]_{\frac{3}{2}}^4 = \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 44 - 24 \right) - \left(-\frac{9}{8} + \frac{99}{16} - 9 \right) = \frac{125}{48} u^2 \end{aligned}$$