**PROBLEMAS RESUELTOS**

**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**

**2014**

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

**Considera las matrices** $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Determina, si existe, la matriz $X$ que verifica** $A\cdot X+B=A^2$

**MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

La matriz $A$ tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$A\cdot X=A^2-B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot A^2-A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A-A^{-1}\cdot B=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

**Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es $-3$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:**

**a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$**

**b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$**

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) Si $A_n$ es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A|=(-2)^3\cdot|A|=(-8)\cdot(-3)=24$

Por otro lado, sabemos que: $A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|I|=1\Rightarrow|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{-3}=-\dfrac{1}{3}$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}=7\cdot2\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-7\cdot2\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-7\cdot2\cdot(-3)=42$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo".

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+2\cdot5\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+2\cdot5\cdot0=5\cdot(-3)=-15$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: "Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero".

**Considera las matrices** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

**a) Calcula** $A^{-1}$**.**

**b) Hallar la matriz** $X$ **que verifica** $A^t\cdot X+B=I$**, siendo** $I$ **la matriz identidad y** $A^t$ **la matriz traspuesta de** $A$**.**

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz $A$ tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz que nos piden:

$$A^t\cdot X+B=I\Rightarrow A^t\cdot X=I-B\Rightarrow (A^t)^{-1}\cdot A^t\cdot X=(A^t)^{-1}\cdot I-(A^t)^{-1}\cdot B\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=(A^t)^{-1}\cdot I-(A^t)^{-1}\cdot B=(A^t)^{-1}-(A^t)^{-1}\cdot B$$

$$X=(A^t)^{-1}-(A^t)^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

**Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$**

**a) ¿Para qué valores de $m$ se verifica que $A^2=2A+I$ ?.**

**b) Para $m=1$, calcula $A^{-1}$ y la matriz $X$ que satisface $A\cdot X-B=A\cdot B$.**

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A^2=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+m)^2+1 & (1+m)+(1-m)\\ (1+m)+(1-m) & 1+(1-m)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m^2+2m+2 & 2\\ 2 & m^2-2m+2\end{pmatrix}$$

$$2A+I=\begin{pmatrix}2+2m & 2\\ 2 & 2-2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2m & 2\\ 2 & 3-2m\end{pmatrix}$$

$$A^2=2A+I\Rightarrow\begin{pmatrix}m^2+2m+2 & 2\\ 2 & m^2-2m+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2m & 2\\ 2 & 3-2m\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}m^2+2m+2=3+2m\\ m^2-2m+2=3-2m\end{matrix}\right\}\Rightarrow m=\pm 1$$

b) Calculamos la matriz inversa de $A$.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz $X$ que nos piden:

$$A\cdot X-B=A\cdot B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X-A^{-1}\cdot B=A^{-1}\cdot A\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B+B$$

$$X=A^{-1}\cdot B+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

**Considera las matrices** $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

**Halla la matriz** $X$ **que verifica:** $A^{-1}\cdot X\cdot A=B-A$.

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la matriz inversa de $A$

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 5 & -2\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$A^{-1}\cdot X\cdot A=B-A\Rightarrow A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A=A\cdot B-A\cdot A\Rightarrow X\cdot A=A\cdot B-A\cdot A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=A\cdot B\cdot A^{-1}-A\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A\cdot B\cdot A^{-1}-A$$

$$X=A\cdot B\cdot A^{-1}-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -2\\ -2 & -5 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ -1 & 16 & -6\\ -2 & 40 & -15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 2\\ -1 & 18 & -7\\ -2 & 45 & -18\end{pmatrix}$$

**Se sabe que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es $3$, calcula los siguientes determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:**

**a) det($A^3$), det($A^{-1}$) y det($A+A^t$); b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$**

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3|=|A|\cdot|A|\cdot|A|=3\cdot 3\cdot 3=27$

Por otro lado, sabemos que: $A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=|I|=1\Rightarrow|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{3}$

La matriz que nos dan es simétrica, por lo tanto, $A=A^t\Rightarrow|A+A^t|=|2A|$

Si $A_n$ es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A|=(2)^3\cdot|A|=8\cdot 3=24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}=-2\cdot(3)=-6$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & d & b \\ c & e & c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}=4\cdot 0-3=-3$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero”.

**Sabiendo que el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:**

**a) $\det(3A)$ .b) $\det(A^{-1})$ .c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ .d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$**

**MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Si $A_n$ es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|3A| = (3)^3 \cdot |A| = (27)\cdot(2) = 54$

b) Sabemos que: $A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-2) = -12$

En el primer paso y en el segundo hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. Y también la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero”.