

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2,3,2)$.

b) Calcula la distancia de r a s .

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta r : $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$

Como las rectas son paralelas, el vector director de s es $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$, luego, la ecuación de la recta s es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1,0,-1)$ a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (1,0,-1)$

$$-2x + y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow -2x + y + z + 3 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{aligned} -2x + y + z + 3 &= 0 \\ x &= -2 - 2t \\ y &= 3 + t \\ z &= 2 + t \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2(-2 - 2t) + 3 + t + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow 12 + 6t = 0 \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto de corte es el $M = (-2 + 4, 3 - 2, 2 - 2) = (2, 1, 0)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM} = (2 - 1, 1 - 0, 0 + 1) = (1, 1, 1)$, luego:

$$d = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3} \text{ u}$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.
b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1,1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a r .

$$x + 2y - z - 3 + k(2x - y + z - 1) = 0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x + 2y - z - 3 + k(2x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 - 3 + k(0 + 0 + 0 - 1) = 0 \Rightarrow k = -3$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es:

$$x + 2y - z - 3 - 3(2x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow -5x + 5y - 4z = 0.$$

b) El vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -5)$$

Luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a r es: $x - 3y - 5z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto $(1,1,0)$, su ecuación será:

$$x - 3y - 5z + D = 0 \Rightarrow 1 - 3 \cdot 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow x - 3y - 5z + 2 = 0$$

Pasamos el plano de general a paramétricas:

$$x - 3y - 5z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3t + 5s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$.

a) Calcula los valores de λ que hacen que \vec{u} y \vec{w} sean ortogonales.

b) Calcula los valores de λ que hacen que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente independientes.

c) Para $\lambda = 1$ escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w}

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(1, -1, 3) \cdot (\lambda, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

b) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -4$$

Luego, son independientes para todos los valores de $\lambda \neq -4$.

c) Escribimos el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

$$(3, 0, 2) = a \cdot (1, -1, 3) + b \cdot (1, 0, -1) + c \cdot (1, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a + c = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a + c = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases}} \right\} a = 1 ; b = 1 ; c = 1$$

Luego la combinación lineal es: $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Sea r la recta dada por $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\left. \begin{array}{l} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{array} \right\}$.

a) Determina la posición relativa de r y s .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} \frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3} \\ x = -2+2t \\ y = -1+t \\ z = 1-3t \end{array} \right\} \Rightarrow A = (-2, -1, 1); \vec{u} = (2, 1, -3)$$

$$s \equiv \left. \begin{array}{l} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \\ x = 3+t \\ y = t \\ z = 6+3t \end{array} \right\} \Rightarrow B = (3, 0, 6); \vec{v} = (1, 1, 3)$$

Calculamos el determinante de $\vec{AB} = (5, 1, 5)$, \vec{u} y \vec{v}

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 3 + 10 - 5 - 6 + 15 = 26 \neq 0 \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) El plano que nos piden viene determinado por (A, \vec{u}, \vec{v}) y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x+6-3y-3+2z-2-z+1-6y-6+3x+6 = 6x-9y+z+2=0$$

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ y $\vec{w} = (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} están en el mismo plano.

b) \vec{w} es perpendicular a \vec{u} y \vec{v} .

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es $\frac{1}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si están en un mismo plano, los vectores son linealmente dependientes, luego, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 2 & 2-3\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Luego, están en el mismo plano si $\alpha = 0$.

b) Si \vec{w} es perpendicular a \vec{u} y \vec{v} , su producto escalar debe valer 0.

$$(1, -1, 0) \cdot (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha) = 1 + \alpha - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(0, 1, 2) \cdot (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha) = 2\alpha + 4 - 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego, para $\alpha = 1$ el vector \vec{w} es perpendicular a \vec{u} y \vec{v}

c) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} |-9\alpha| \Rightarrow |-9\alpha| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{9} \\ 9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta r dada por $\left. \begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r .

b) Calcula la distancia de P a r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{array} \right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u} = (-1, -1, 1)$.

Todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-x - y + z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto P :

$$-x - y + z + D = 0 \Rightarrow -2 + 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x - y + z = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-x - y + z = 0 \Rightarrow -2 + t - 1 + t + t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de corte es: $M = (2-1, 1-1, 1) = (1, 0, 1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une P y el punto M , es decir:

$$\left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} u$$

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el área del triángulo ABC .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto $A = (-3,4,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (6,2,3)$ y $\overrightarrow{AC} = (2,-2,1)$.

Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x - 2z + 3 = 0$$

b) La recta viene definida por el punto $(0,0,0)$ y su vector director será el vector normal del plano

$\vec{u} = (1,0,-2)$. Luego su ecuación será: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 0 + 256} = \frac{\sqrt{320}}{2} u^2$$

Considera el punto $A(8, -1, 3)$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{3}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r .

b) Halla el punto simétrico de A respecto de r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. El vector director de la recta $(2, 1, 3)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x + y + 3z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(8, -1, 3)$.

$$2x + y + 3z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 8 - 1 + 3 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

Luego, el plano que nos piden es: $2x + y + 3z - 24 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x + y + 3z - 24 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (-1 + 2t) + (2 + t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 24 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(-1 + 3, 2 + \frac{3}{2}, 1 + \frac{9}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(8, -1, 3) + (a, b, c)}{2} = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right) \Rightarrow P' = (-4, 8, 8)$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y s la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1+t, 1+t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1-2s, s, 1-2s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow 3t+3s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (-2, 1, -2) = 0 \Rightarrow 3-3t-9s = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = -\frac{1}{2}$; $s = \frac{1}{2}$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right); \quad B = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ y $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$

a) Halla la posición relativa de π y r .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta r a implícitas $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{cases}$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left. \begin{array}{l} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{array} \right\}$

Como $R(A) = 2$ y $R(M) = 3$, la recta es paralela al plano

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k, 2, 2k)$ y el vector normal del plano π $(2, 1, -1)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1-3k, 2, 2k) \cdot (2, 1, -1) = 0 \Rightarrow 2-6k+2-2k=0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $-x+4y+2z-7=0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k, 2, 2k)$ y el vector normal del plano π $(2, 1, -1)$, tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1-3k}{2} = \frac{2}{1} = \frac{2k}{-1} \Rightarrow k = -1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $2x+y-z-4=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=t \\ y=4-2t+s \\ z=s \end{array} \right\}$

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} .$$

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y por B .

b) Halla el punto de la recta r que está a la misma distancia de A y de B .

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por el punto $(1,0,1)$ de la recta, el vector director de la recta $\vec{u} = (2,1,0)$ y el vector $\vec{AB} = (0,-2,-4)$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y - z + 2 = 0$$

b) Calculamos los vectores:

$$\vec{AC} = (1+2t-1, t-1, 1-2) = (2t, t-1, -1); \vec{BC} = (1+2t-1, t+1, 1+2) = (2t, t+1, 3)$$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\left| \vec{AC} \right| = \left| \vec{BC} \right| \Rightarrow \sqrt{4t^2 + (t-1)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 + (t+1)^2 + 9} \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto C es: $C = (1+2t, t, 1) = (-3, -2, 1)$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r .

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a r : $x - y + 4z + D = 0$.

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $(0,0,0)$, luego:

$$x - y + 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 4 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x - y + 4z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$x - y + 4z = 0 \Rightarrow 1 + t + t + 4(-1 + 4t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1 + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1 + \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une el origen de coordenadas y el punto M , es decir:

$$|\vec{OM}| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ u}$$

b) La ecuación de la recta que pasa por O y M es: $\frac{x}{\frac{7}{6}} = \frac{y}{-\frac{1}{6}} = \frac{z}{-\frac{2}{6}}$