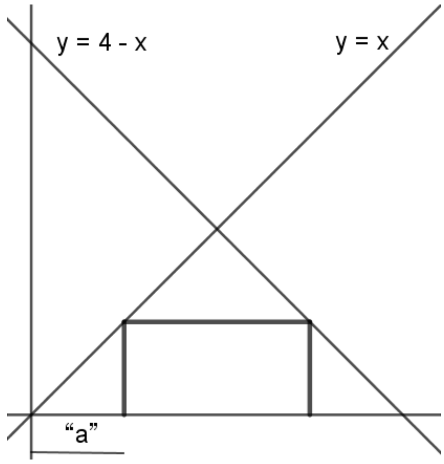
Opción A

Ejercicio 1 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 – x$. Se pide:



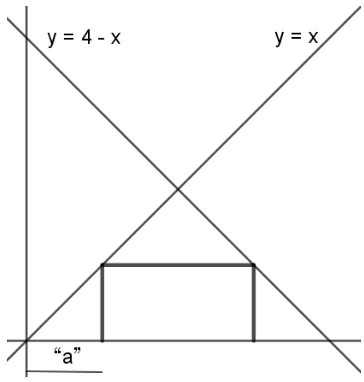
a) [0'25 puntos] Halla la altura del rectángulo en función de "a" (ver la figura).

b) [1 punto] Halla la base del rectángulo en función de "a".

c) [1'25 puntos] Encuentra el valor de "a" que hace máximo el área del rectángulo

Solución

Es un problema de optimización, pero antes tenemos que calcular la base y altura del rectángulo en función de "a".



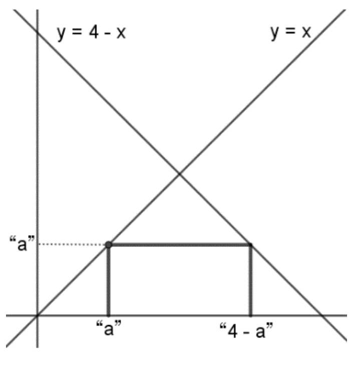
a)
Halla la altura del rectángulo en función de "a" (ver la figura).

Observamos que la abscisa "a" verifica la ecuación $y = x$, por tanto $y(a) = (a)$ = "a", es decir **la altura del rectángulo es "a".**

b)
Halla la base del rectángulo en función de "a".

Observamos que la ordenada "a", es decir la altura del rectángulo, verifica la ecuación $y = 4 - x$, por tanto $(a) = 4 – x$, de donde la abscisa de la derecha es $x = 4 – a$, por tanto **la base del rectángulo es (4 - a) - a = = "4 – 2a".**

El dibujo seria:



c)
Encuentra el valor de "a" que hace máximo el área del rectángulo

Función a maximizar Área = $A(a)$ = Base x altura = $(4 – 2a)\cdot a = 4a – 2a^2$.

Si A'(b) = 0 y A''(b) < 0, x = b es un máximo de A(a).

A'(a) = 4 – 4a. De A'(a) = 0, tenemos 4 – 4a = 0, es decir 4 = 4a, de donde a = 1.

Las medidas del rectángulo son "base" = 4 – 2(1) = 2 y "altura" = (1) = 1. Su área es 2 u^2.

Veamos que a = 1 es un máximo, viendo que A''(1) < 0. A'(a) = 4 – 4a; A''(a) = – 4

Sustituyendo "1" por "a" en A''(a) obtenemos A''(1) = - 4 < 0, luego es un máximo.

El valor de "a" que hace máxima el área del rectángulo es a = 1.

Ejercicio 2 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = e^{2-x}$
(a) [0'75 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 2.
(b) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta x + y = 3.
(c) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto indicado.

Solución

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = e^{2-x}$
(a)
Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 2.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 es "$y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2)$".

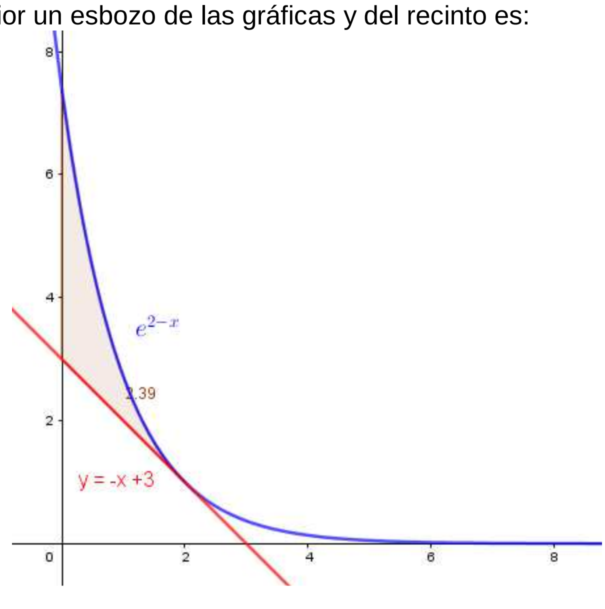
$f(x) = e^{2-x} \to f(2) = e^{2-(2)} = e^0 = 1$.
$f'(x) = e^{2-x}\cdot(-1) \to f'(2) = e^{2-(2)}\cdot(-1) = e^0\cdot(-1) = -1$.

La recta tangente pedida es $y - 1 = -1\cdot(x - 2)$, de donde $y = -x + 3$. (Es la recta del apartado (b))
(b)
Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta x + y = 3.

La gráfica de la recta y = -x + 3, se dibuja con dos puntos, uno el de tangencia (2,1) y otro el corte con el eje de ordenadas OY (ecuación x = 0), es decir punto (0,3).

Como $f(x) = e^{2-x} = e^2.e^{-x}$ (en azul), sabemos que su gráfica es parecida a la gráfica de e^{-x}, que e s exactamente igual que la gráfica de e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por e^2, está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si x = 0, $f(0) = e^2\cdot e^0 = e^2$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal en + ∞, porque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^{2-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{e^x} = \frac{e^2}{\infty} = 0$.

Por otro lado como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{2-x}) = e^{2-(-\infty)} = e^{2+\infty} = e^{+\infty} = +\infty$, vemos que en - ∞ la gráfica esta en + ∞.
Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas y del recinto es:



(c)
Calcula el área del recinto indicado.

Observando el recinto y la abscisa de tangencia tenemos:

Área = $\int_0^2 \left(e^{2-x} - (-x+3)\right)dx = \int_0^2 \left(e^{2-x} + x - 3\right)dx = \left[-1\cdot e^{2-x} + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_0^2 =$

$= \left(-1\cdot e^{2-2} + \frac{2^2}{2} - 3(2)\right) - \left(-1\cdot e^{2-0} + 0 - 0\right)\ u^2 = (-e^0 + 2 - 6) - (-e^2)\ u^2 =$ $\mathbf{(e^2 - 5)\ u^2 \cong 2'389\ u^2}$**.**

Ejercicio 3 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Discute el rango de A según los valores del parámetro "λ".
(b) [1'25 punto] Para "λ = - 2", estudia y resuelve el sistema dado por AX = B.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a)
Discute el rango de A según los valores del parámetro "λ".

Tenemos $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Saco 2 de } C_1 \\ \\ \text{Saco -1 de } C_2\end{matrix}$ $= 2\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2+F_1\end{matrix}$ $= -2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Saco} \\ \lambda+2 \\ \text{de } F_3\end{matrix}$ $=$

$= -2\cdot(\lambda+2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1\end{matrix}$ $= -2\cdot(\lambda+2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -2\cdot(\lambda+2)\cdot(1)\cdot(\lambda-1)\cdot(1-\lambda).$

De det(A) = 0, tenemos $-2\cdot(\lambda+2)\cdot(1)\cdot(\lambda-1)\cdot(1-\lambda) = 0$, de donde $\lambda+2 = 0$, $\lambda-1 = 0$ y $1-\lambda = 0$, es decir sus soluciones son $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 1$.

Si λ ≠ -2 y λ ≠ 1 (dos veces), det(A) ≠ 0, con lo cual rango(A) = 3.

Si **λ = 1,** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1\end{matrix}$ $\approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir cómo nos queda **una sola fila** después de realizar las trasformaciones elementales de Gauss, tenemos **rango(A) = 1.**

Si **λ = -2,** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, como el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2.**

(b)
Para "λ = - 2", estudia y resuelve el sistema dado por AX = B.

Hemos visto en el apartado (a) que si "λ = - 2", *rango(A) = 2, luego no existe la inversa de la matriz A.*

Sea A* la matriz ampliada del sistema $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como en A* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ \\ \end{matrix}$ $=$

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna}\end{matrix}$ $= (-1)\cdot(-4 + 4) = 0$, tenemos rango (A*) = 2.

Como para "λ = - 2" tenemos rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, es un sistema compatible e indeterminado, y tiene más de una solución (en R infinitas), por el Teorema de Rouche.

Por tener rango 2 utilizamos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, que son con las que hemos calculado el menor de orden 2 de A distinto de cero)

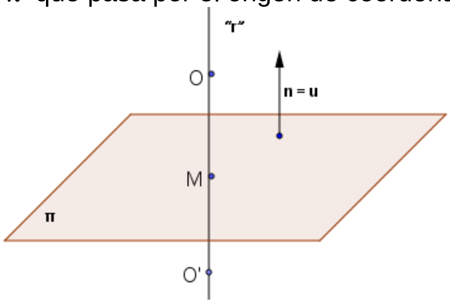
$\begin{cases} 2x - y -2z = -1 \\ 2x + 2y + z = 1 \ (F_2\text{-}F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} 2x - y + -2z = -1 \\ 3y + 3z = 2 \end{cases}$. Llamando **z = m** $\in$ R tenemos **y = 2/3 – m**. Entrando en la primera ecuación 2x – (2/3 – m) -2(m) = -1, de donde 2x = -1/3 + m, luego **x = -1/6 + m/2**, y l**a solución del sistema es (x, y, z) = (-1/6 + m/2, 2/3 - m, m), con m $\in$ R.**

Ejercicio 4 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera el plano π de ecuación x + 2y + z = 6.
(a) [1 punto] Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
(a) [0'5 puntos] Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto a π.
(b) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes coordenados.

Solución

Considera el plano π de ecuación x + 2y + z = 6.
(a)
Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.



La recta "r" perpendicular al plano π que pasa por el origen de coordenadas O(0,0,0), tiene por vector director **u** el vector normal del plano **n** = (1,2,1).

$$"r" \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda, \text{ con } \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

(a)
Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto a π.

La figura anterior nos sirve. Necesitamos el punto M proyección ortogonal de O sobre π, el cualñ es el corte de la recta "r" calculada en el apartado (a) con el plano π, es decir M = s$\cap\pi$, y M es el punto medio del segmento OO', donde O' es el simétrico pedido.

M = s$\cap\pi$, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro "λ", y luego el punto M.
$\rightarrow$ (λ) + 2(λ) + (λ) = 6, es decir 6) = 6, de donde λ = 1, y el punto M es M((1), 2(1), (1)) = M(1, 2, 1).

M es el punto medio del segmento OO', donde O' es el simétrico pedido.
(1, 2, 1) = ((0+x)/2, (0+y)/2, (0+z)/2), de donde x = 2, y = 4 y z = 2.

El simétrico pedido es O'(2, 4, 2).
(b)
Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes coordenados.

Sabemos que el volumen del tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **OA, OB y OC**, siendo A, B y C los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados; es decir el volumen pedido es el valor absoluto (lo notaremos **| |**) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de los tres vectores **OA, OB y OC**. El producto mixto de tres vectores era su determinante.

Calculamos los puntos de corte del plano $\pi \equiv$ x + 2y + z = 6 con los ejes coordenados, A, B y C.

Para y = z = 0, tenemos x = 6, de donde x = 6. Punto A(6,0,0).
Para x = z = 0, tenemos 2y = 6, de donde y = 3. Punto B(0,3,0)
Para x = y = 0, tenemos z = 6, de donde z = 6. Punto C(0,0,6).

OA = (6 - 0,0 - 0,0 - 0) = (6, 0, 0); **OB** = (0 - 0,3 - 0,0 - 0) = (0, 3, 0); **OC** = (0 - 0,0 - 0,6 - 0) = (0, 0, 6)

Sabemos que, **volumen tetraedro =** (1/6)·| [**OA**, **OB**, **OC**] | = (1/6)·| det(**OA**, **OB**, **OC**) | =

$$= (1/6)\cdot\left\|\begin{matrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{Producto}\\ \text{elementos}\\ \text{diagonal}\end{matrix}\right| = (1/6)\cdot|(6)\cdot(3)\cdot(6)|\,u^3 = \mathbf{18\ u^3}.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera la función f : R → R dada por $f(x) = \begin{cases} -x\cdot e^{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x\cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ x\cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en x = 0 y x = 1.
b) [1'5 puntos] Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

Solución

Considera la función f : R → R dada por $f(x) = \begin{cases} -x\cdot e^{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x\cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ x\cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

a)
Estudia la derivabilidad de f en x = 0 y x = 1.

Estudiamos primero la continuidad, pues después veremos la continuidad de la derivada.

Sabemos que f es continua en x = 0 si: $f(0) = \lim_{x\to 0^-}[f(x)] = \lim_{x\to 0^+}[f(x)]$
$f(0) = \lim_{x\to 0^-}[f(x)] = \lim_{x\to 0}[-x\cdot e^{x-1}] = -0\cdot e^{0-1} = 0$.
$\lim_{x\to 0^+}[f(x)] = \lim_{x\to 0}[x\cdot e^{x-1}] = 0\cdot e^{0-1} = 0$. Como es igual **f es continua en x = 0**.

Sabemos que f es continua en x = 1 si: $f(1) = \lim_{x\to 1^-}[f(x)] = \lim_{x\to 1^+}[f(x)]$
$f(1) = \lim_{x\to 1^+}[f(x)] = \lim_{x\to 1}[x\cdot e^{1-x}] = 1\cdot e^0 = 1$.
$\lim_{x\to 1^-}[f(x)] = \lim_{x\to 1}[x\cdot e^{x-1}] = 1\cdot e^0 = 1$. Como es igual, **f es continua en x = 1**.
b)
Estudiamos la derivabilidad de f en x = 0 y x = 1 (utilizamos la continuidad de la derivada).

$$f(x) = \begin{cases} -x\cdot e^{x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x\cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \le 1; \\ x\cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}\quad f'(x) = \begin{cases} -(1\cdot e^{x-1} + x\cdot e^{x-1}\cdot(1)) & \text{si } x < 0 \\ 1\cdot e^{x-1} + x\cdot e^{x-1}\cdot(1) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1\cdot e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(-1) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que f sea derivable en x = 0 se tiene que verificar: $f'(0^-) = f'(0^+)$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}[f'(x)] = \lim_{x\to 0^-}[-(e^{x-1} + x\cdot e^{x-1})] = -(e^{0-1} + 0\cdot e^{0-1}) = -e^{-1} = -1/e$.
$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}[f'(x)] = \lim_{x\to 0^+}[e^{x-1} + x\cdot e^{x-1}] = e^{0-1} + 0\cdot e^{0-1} = e^{-1} = 1/e$.
Como $f'(0^-) = -1/e \neq f'(0^+) = 1/e$, **la función f no es derivable en x = 0.**

Para que f sea derivable en x = 1 se tiene que verificar: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}[f'(x)] = \lim_{x\to 1^-}[e^{x-1} + x\cdot e^{x-1}] = e^0 + 1\cdot e^{-1} = 1 + e^{-1} = 1 + 1/e$.
$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}[f'(x)] = = \lim_{x\to 1^+}[e^{1-x} - x\cdot e^{1-x}] = e^0 - 1\cdot e^1 = 1 - e$.
Como $f'(1^-) = 1 + 1/e \neq f'(1^+) = 1 - e$, **la función f no es derivable en x = 1.**
b)
Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

Considera la función $f : R \to R$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x\cdot e^{x-1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x\cdot e^{x-1} & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x\cdot e^{1-x} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$

Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla sigue también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \to \infty$.

Para $-\infty$, tomamos la rama $f(x) = -x\cdot e^{x-1}$ $(x \le 0)$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(-x) = \lim_{x\to +\infty} [-(-x)\cdot e^{-x-1}] = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x+1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}; L'H\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$, luego **la recta y = 0 es una asíntota horizontal en - ∞.**

Para $+\infty$, tomamos la rama $f(x) = x\cdot e^{1-x}$ $(1 < x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} [x\cdot e^{1-x}] = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}; L'H\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$, luego **la recta y = 0 es una asíntota horizontal en + ∞.**

Ejercicio 2 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera las funcion $f : (-e/2, +\infty) \to R$ definidas por $f(x) = \ln(2x + e)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

(a) [0'75 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

(b) [1'75 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

Solución

Considera las funcion $f : (-e/2, +\infty) \to R$ definidas por $f(x) = \ln(2x + e)$, donde ln denota logaritmo neperiano.

(a)

Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Sabemos que la gráfica de ln(2x + e) es parecida a la de ln(x) que sabemos, siempre es creciente, y corta al eje OX en el punto de abscisa x = 0, (ln(x) corta al eje OX en x = 1, y tiene una asíntota vertical en x = 0).

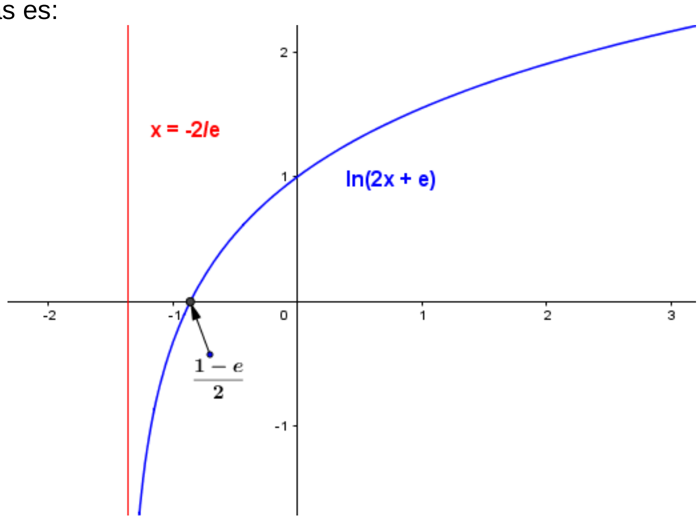
Calculamos los cortes con los ejes para ver la asíntota vertical y el corte con los ejes.

De x = 0 tenemos f(0) = ln(0 + e) = ln(e) = 1, es decir **pasa por el punto (0,1)**.

De f(x) = 0 tenemos 0 = ln(2x + e) = ln(1), de donde 2x + e = 1, por tanto x = (1 – e)/2, es decir **pasa por el punto ((1-e)/2, 0).**

Sabemos que $\ln(0^+) = -\infty$ (es un límite). Como $\lim_{x\to -e/2+} f(x) = \ln(2(-e/2) + 2) = \ln(0^+) = -\infty$, **la recta x = -e/2 es una asíntota vertical de la gráfica de la función f(x) = ln(2x + e).**

Un esbozo de las gráficas es:



(b)
Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

Observando la gráfica el área qu me piden es:

Área = $\int_{(1-e)/2}^{0} \ln(2x+e)dx = ^{**} [x\cdot\ln|2x+e| - x + (e/2)\cdot\ln|2x+e|]_{(1-e)/2}^{0} =$

$= (0 - 0 + (e/2)\cdot\ln|0+e|) - (((1-e)/2)\cdot\ln|2\cdot(1-e)/2 + e| - (1-e)/2 + (e/2)\cdot\ln|2(1-e)/2 + e|)\ u^2 =$

$= e/2 - (((1-e)/2)\cdot\ln|1| - (1-e)/2 + (e/2)\cdot\ln|1|)\ u^2 = e/2 - 0 + 1/2 - e/2 - 0\ u^2$ $\mathbf{= 1/2\ u^2}$.

** $\int \ln(2x+e).dx$, que es una integral por partes ($\int u.dv = u.v - \int v.du$)

Tomamos $u = \ln(2x+e)$ de donde $du = 2\cdot dx/(2x+e)$, y $dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$, luego nos resulta

$\int \ln(2x+e).dx = x\cdot\ln(2x+e) - \int [2x/(2x+e)]dx = x\cdot\ln(2x+e) - \int [(2x+e-e)/(2x+e)]dx =$

$= x\cdot\ln(2x+e) - \int [1 - e/(2x+e)]dx = x\cdot\ln|2x+e| - x + (e/2)\cdot\ln|2x+e| + K$

La integral $\int [2x/(2x+e)]dx$ es racional y también se podría haber realizado la división entera.

Ejercicio 3 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A^2X - BA + X = CD$.

Solución

De $A^2X - BA + X = CD$, tenemos $(A^2 + I_3)X = BA + CD$, es decir $EX = BA + CD$ con $E = A^2 + I_3$.

$$E = A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot I_3.$$

Como $\det(E) = |E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot2 = 8 \neq 0$, existe la matriz inversa $E^{-1} = \frac{1}{|E|}\cdot Adj(E^t)$. También vemos que $E^{-1} = (2\cdot I_3)^{-1} = (2)^{-1}\cdot(I_3)^{-1} = (1/2)\cdot I_3$.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad $EX = BA + CD$ por la izquierda por E^{-1} tenemos:
$E^{-1}\cdot EX = E^{-1}\cdot(BA + CD) \rightarrow I_3\cdot X = (1/2)\cdot I_3\cdot(BA + CD) \rightarrow$ $\mathbf{X = (1/2)\cdot(BA + CD)}$.

Luego $\mathbf{X = (1/2)\cdot(BA + CD) =}$ $X = (1/2)\cdot(BA + CD) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -8 & 10 & -12 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -9 & 9 & -12 \\ 13 & -13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera las rectas "r" y "s" dadas por $r \equiv x - 2 = y - 2 = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$.

(a) [1 punto] Determina "m" para que r y s sean paralelas.
(b) [0'5 puntos] Halla, si existe, un valor de "m" para el que ambas rectas sean la misma.
(c) [1 punto] Determina "m = 1", calcula la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución

Considera las rectas "r" y "s" dadas por $r \equiv x - 2 = y - 2 = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$.

(a)
Determina "m" para que r y s sean paralelas.

De la recta r tomamos un punto, el A(2,2,0) y un vector, el **u** = (1,1,1).
De la recta s tomamos un punto, el B(4,4,0) y un vector, el **v** = (1,1,m).

Como nos piden que las rectas r y s sean paralelas, sus vectores **u** = (1,1,1) y **v** = (1,1,m) han de ser linealmente dependientes, es decir sus coordenadas serán proporcionales.

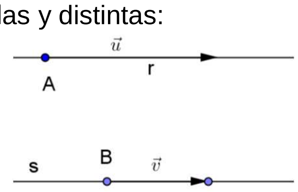
De **u** = (1,1,1) y **v** = (1,1,m), tenemos 1/1 = 1/1 = 1/m, de donde m = 1. Es decir **las rectas r y s son paralelas para el valor de "m = 1".**
(b)
Halla, si existe, un valor de "m" para el que ambas rectas sean la misma.

Para que las rectas r y s sean coincidentes han de ser paralelas (del apartado (a) hemos visto que son paralelas si m = 1), y todo punto de una de ellas debe verificar la ecuación de la otra recta.

Tomamos el punto B(4,4,0) de la recta s, y veamos si verifica la ecuación de $r \equiv x - 2 = y - 2 = z$.

Como $(4) - 2 = (4) - 2 \neq (4)$, **el punto B de la recta s no pertenece a la recta r, por tanto no hay ningún valor de "m" para que las rectas r y s coincidan.**
(c)
Determina "m = 1", calcula la ecuación del plano que contiene a r y s.

Ya hemos visto que las rectas son paralelas y distintas:



En este caso para determinar el plano que forman, necesitamos un punto, el A(2,2,0) de r, y dos vectores el **u** = (1,1,1) de r y el **AB** = (2,2,0).

Damos el plano en forma vectorial: $\pi \equiv (x,y,z) = A(2,2,0) + \lambda\cdot(1,1,1) + \mu\cdot(2,2,0)$ con $\lambda, \mu \in$ R.