Opción A

Ejercicio 1 opción A, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$.

Solución

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H).- (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)} = \left\{\frac{tan(0) - 0}{0 - sen(0)} = \frac{0}{0}; L'H\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{1+tg^2(x) - 1}{1 - cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{tg^2(x)}{1 - cos(x)} = \left\{\frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}; L'H\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot tg(x)\cdot(1+tg^2(x))}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\frac{sen(x)}{cos(x)}\cdot(1+tg^2(x))}{sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot(1+tg^2(x))}{cos(x)} = \frac{2\cdot(1+0)}{1} = 2$$

Ejercicio 2 opción A, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

Considera las funciones f y g : R → R definidas por f(x) = $-x^2 - x + 3$ y g(x) = |x|.

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

Considera las funciones f y g : R → R definidas por f(x) = $-x^2 - x + 3$ y g(x) = |x|.

a)

Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

Sabemos que g(x) = |x| = $\begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ +x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$. Su gráfica está formada por dos semirrectas, "x" y "– x" son rectas luego con dos puntos es suficiente para dibujarlas ("x" es la bisectriz del I y III cuadrante, y solo se dibuja para x ≥ 0, y "- x" es la bisectriz del II y IV cuadrante, y solo se dibuja para x < 0).

La gráfica de "$-x^2 - x + 3$" es la de una parábola con las ramas hacia abajo (el nº que multiplica a x^2 es negativo), abscisa del vértice en la solución de f '(x) = 0 = -2x -1 = 0 → x = -1/2, luego el vértice es V(-1/2, f(-1/2)) = V(-0'5, -3'25).

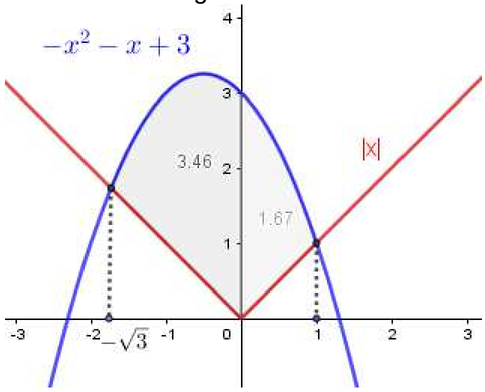
Calculamos los puntos de corte entre ambas gráficas, es decir las soluciones de "f(x)" = g(x)"

Si x < 0, tenemos $-x^2 - x + 3 = -x$ → $0 = x^2 - 3$ → $x^2 = 3$ → $x = \pm\sqrt{3}$. Solo sirve $x = -\sqrt{3}$ (estamos en x<0), luego el punto de corte es $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Si x > 0, tenemos $-x^2 - x + 3 = x$ → $0 = x^2 + 2x - 3$ → $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$, de donde x = 1 y x = -3.

Solo sirve x = 1 (estamos en x > 0), luego el punto de corte es (1, 1).

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de sus gráficas es:



b)

Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Área = $\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(-x^2 - x + 3 - (-x)\right)dx + \int_{0}^{1}\left(-x^2 - x + 3 - (x)\right)dx = \int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(-x^2 + 3)\right)dx + \int_{0}^{1}\left(-x^2 - 2x + 3\right)dx =$

$= \int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(-x^2 + 3)\right)dx + \int_{0}^{1}\left(-x^2 - 2x + 3\right)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 3x\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[\frac{-x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{1} =$

$= (0+0) - \left(\frac{-(-\sqrt{3})^3}{3} + 3(-\sqrt{3})\right) + \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right) - (0-0+0)\ u^2 = 2\cdot\sqrt{3} + \frac{5}{3}\ u^2 \cong 5'131\ u^2.$

Ejercicio 3 opción A, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula los siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:

a) [0,75 puntos] El determinante de la matriz $5M^4$.

b) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ c) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

Solución

Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula los siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:

a)

El determinante de la matriz $5M^4$.

(i) Sabemos que $\det(k\cdot A_n) = (k)^n\cdot\det(A)$ y que $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)\cdot$

Luego $\mathbf{det(5M^4)} = \det((5M)\cdot M\cdot M\cdot M) = (5)^3\cdot\det(M)\cdot\det(M)\cdot\det(M)\cdot\det(M) = 125\cdot(2)^4 = \mathbf{2000}$

b)

(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii) Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iii)}\} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iii)}\} = \frac{-1}{3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$= (-1/3)\cdot\det(M) = (-1/3)\cdot 2 = \mathbf{-2/3.}$

c)

(iv) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el premier y segundo sumando respectivamente.

(v) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

(vi) El determinante de una matriz coincide con el determinante de su tras puesta

$\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iv)}\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (v) y (vi)}\} =$

$= 0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \det(M) \mathbf{= 2}.$

Ejercicio 4 opción A, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

Sea r la recta que pasa por los puntos A(3, 6, 7) y B(7, 8, 3) y sea s la recta dada por

$s \equiv \begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$

a) [1'25 puntos] Determina la posición relativa de r y s.
b) [1'25 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

Sea r la recta que pasa por los puntos A(3, 6, 7) y B(7, 8, 3) y sea s la recta dada por

$$s \equiv \begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$$

a)
Determina la posición relativa de r y s.

De la recta "r" tomamos un punto el A(3, 6, 7) y un vector director el **u** = **AB** = (4, 2, -4).

De $s \equiv \begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases}$ tomamos un punto el C(-3, 0, 7) (hacemos y = 0 y sumamos 4x = -12, luego x = -3 y entrando en la 1ª -3 + 10 = z = 7), y un vector **v** , el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan "s", es decir **v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(-4 - 4) - **j**(1 + 3) + **k**(-4 + 12) = (-8,-4,8).

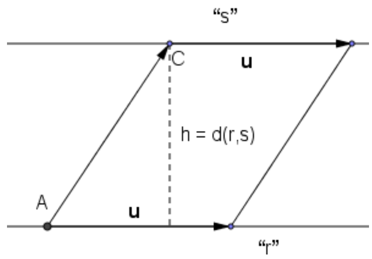
Como **v** = (-2)·**u**, los vectores son proporcionales luego **las rectas "r" y "s" son paralelas.**

Veamos si la proporcionalidad se extiende al vector **AC**, en cuyo caso son paralelas coincidentes. También podemos ver si el punto A de "r" pertenece o no a "s" (vemos esto último)

Como $\begin{cases} (3) - 4(6) - (7) = -10. \text{ Falso} \\ 3(3) - 4(6) + (7) = -2. \text{ Falso} \end{cases}$. Como el punto A de "r" no verifica la ecuación de "s", **las rectas "r" y "s" son paralelas y distintas.**

b)
Calcula la distancia entre r y s.

Calculamos la distancia entre r y s, utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A(3, 6, 7) y el vector **u** = (4, 2, -4).

El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AC** = (-6, -6, 0) es ||**AC**x**u**|| = base·altura =
= ||**u**||·h, pero la altura "h" es d(r, s), luego d(r, sr) = (||**AC**x**u**||)/(||**u**||) ("x" es el producto vectorial).

Tenemos **AC**x**u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ = **i**(24 - 0) - **j**(-24 - 0) + **k**(-12 + 24) = (24, 24, 12).

||**AC**x**u**|| = $\sqrt{(24^2+24^2+12^2)}$ = 36; ||**u**|| = $\sqrt{(4^2+2^2+4^2)}$ = 6

Luego d(r, s) = (||**AC**x**u**||) / (||**u**||) = 36 / 6 u^1 **= 6 u^1**.

Opción B

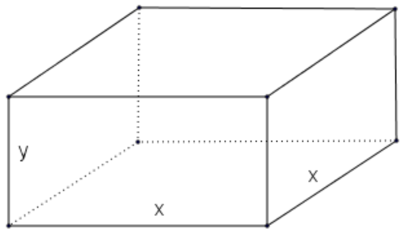
Ejercicio 1 opción B, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

[2'5 puntos] Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m2 para los laterales y de 24 euros/m2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

Solución

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m2 para los laterales y de 24 euros/m2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

Solución



Función a Optimizar: Volumen = V = área base x altura = $x^2\cdot y$

Relación entre las variables: El precio del material es de 18 euros/m2 para los laterales y de 24 euros/m2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

$50 = 18\cdot(4x\cdot y) + 24\cdot(x^2) \rightarrow 72x\cdot y = 50 - 24x^2 \rightarrow y = 50/(72x) - 24x^2/(72x) = (25/36)\cdot(1/x) - (1/3)\cdot x$

Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de g(x)
Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de g(x)

$V(x) = x^2\cdot y = x^2\cdot((25/36)\cdot(1/x) - (1/3)\cdot x) = (25/36)\cdot x - (1/3)\cdot x^3$.
$V'(x) = (25/36) - x^2$.

De V '(x) = 0, tenemos $(25/36) - x^2 = 0$, de donde $x^2 = 25/36$, de donde $x = \pm (5/6)$. Como es una longitud solo es válida x = 5/6.

V ''(x) = - 2x, luego V ''(5/6) = – 2(5/6) = -10/6 < 0, **por tanto x = 5/6 es un máximo relativo**.

De x = 5/6 m, tenemos y = (25/36)·(6/5) – (1/3)·(5/6) = 5/9 m, luego **las dimensiones del caja son x = 5/6 ≅ 0'833 m. e y = 5/9 ≅ 0'556 m.**

Ejercicio 2 opción B, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

Se sabe que la función f : [0, +∞) → R dada por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua.

a) [0'5 puntos] Determina a.

b) [2 puntos] Para a = 8, calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

Solución

Se sabe que la función f : [0, +∞) → R dada por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$ es continua.

a)
Determina a.

Nos dicen que f es continua en su dominio; en particular es continua en x = 8.

Como es continua en x = 8, $f(8) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} f(x)$

$f(8) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a}$; $\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+}\left(\dfrac{x^2 - 32}{x - 4}\right) = \dfrac{64 - 32}{8 - 4} = 8$.

Igualando tenemos $\sqrt{8a} = 8$, elevando al cuadrado 8a = 64, de donde **a = 8.** .

b)
Para a = 8, calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

Vemos que $\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{8} f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$.

Calculamos primero las integrales indefinidas:

$$\int\sqrt{8x}dx = \int\sqrt{8}\cdot\sqrt{x}dx = \sqrt{8}\cdot\int x^{1/2}dx = \sqrt{8}\cdot\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \sqrt{8}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{8}\cdot\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2\sqrt{8x^3}}{3}$$

$\int\left(\frac{x^2-32}{x-4}\right)dx$. Como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -32 & x-4 \\ \cline{3-3} -x^2+4x & & x+4 \\ \hline 4x & -32 & \\ -4x & +16 & \\ \hline & -16 & \end{array}$$

$$\int\left(\frac{x^2-32}{x-4}\right)dx = \int(\text{Cociente})dx + \int\frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}dx = \int(x+4)dx + \int\frac{-16}{x-4}dx = \frac{x^2}{2}+4x-16\cdot\ln|x-4|$$

Luego $\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{8} f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \left[\frac{2\sqrt{8x^3}}{3}\right]_0^8 + \left[\frac{x^2}{2}+4x-16\cdot\ln|x-4|\right]_8^{10} =$

$$= \left(\frac{2\sqrt{8\cdot 8^3}}{3}-0\right) + \left(\frac{10^2}{2}+4(10)-16\cdot\ln|10-4|\right) - \left(\frac{8^2}{2}+4\cdot(8)-16\cdot\ln|8-4|\right) =$$

$= 16/3 + 90 - 16\cdot\ln(6) - 64 + 16\cdot\ln(4)$ **=** $97/3 + 16\cdot\ln(4) - 16\cdot\ln(6) = 97/3 + 16\cdot\ln(4/6)$ **= 97/3 + 16·ln(2/3).**

Ejercicio 3 opción B, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

Considera las matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) [0'75 puntos] Halla, si existe, la inversa de A.
b) [1'25 puntos] Determina los valores de m tales que (A - mI) tiene inversa (I es la matriz identidad).
c) [0'5 puntos] Calcula el rango de (A - 2I).

Solución

Considera las matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a)
Halla, si existe, la inversa de A.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= (+1)\cdot(0+4) = 4 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

La calculamos: $|A| = 4$; $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa **es A^{-1} =**

= $\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/4 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

b)
Determina los valores de m tales que (A - mI) tiene inversa (I es la matriz identidad).

La matriz $C = A - m\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{pmatrix}$, tiene inversa si $\det(C) \neq 0$.

Tenemos $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda fila $= (2-m)\cdot\begin{vmatrix} -m & -2 \\ 1 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)\cdot((-m)\cdot(3-m)+2) =$

$= (2-m)\cdot(m^2 - 3m + 2)$.
De $\det(C) = 0$, tenemos $(2-m)\cdot(m^2 - 3m + 2) = 0$, es decir $m = 2$ y $m^2 - 3m + 2 = 0$ de donde, resolviéndola sale $m = 1$ y $m = 2$.

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$, $\det(C) \neq 0$, y existe la matriz inversa de $C = A - m\cdot I_3$.
c)
Calcula el rango de $(A - 2I)$.

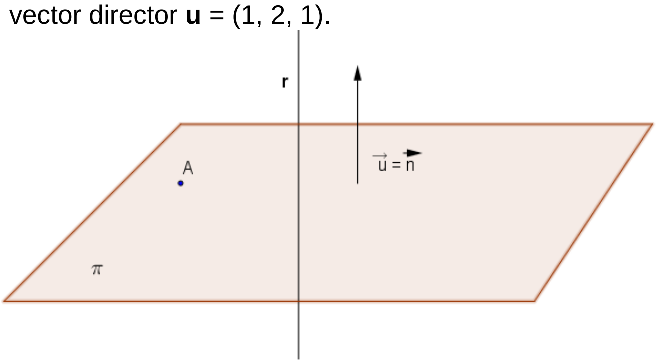
Si $m = 2$, tenemos $C = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1+2\cdot F_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, como la matriz escalonada de la matriz $C = = A - 2I_3$ tiene dos filas con números distintos de cero, **tenemos rango(C) = rango($A - 2I_3$) = 2.**

Ejercicio 4 opción B, Suplente Junio de 2018 (modelo 6)

a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por el punto A(0, 1, 0) y es perpendicular a la recta r dada por $x + 1 = \dfrac{y+2}{2} = z - 1$.
b) [1'25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 12$ con los ejes coordenados.

Solución

a)
Determina la ecuación del plano que pasa por el punto A(0, 1, 0) y es perpendicular a la recta r dada por
$x + 1 = \dfrac{y+2}{2} = z - 1$.
De la recta "r" tomamos su vector director **u** = (1, 2, 1).



Como me piden el plano "π" perpendicular a la recta "r" por el punto A(0, 1, 0), el vector normal del plano **n** es el vector director de la recta **u** =(1, 2, 1).
$\pi \equiv$ **AX•n** = 0 = (x - 0, y - 1, z - 0)•(1, 2, 1) **= x + 2y + z - 2 = 0**, donde • es el producto escalar de dos vectores.
b)
Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 12$ con los ejes coordenados.

Calculamos los puntos de corte del plano $\pi' \equiv 2x + 3y + 4z = 12$ con los ejes coordenados, D, B y C.

Para y = z = 0, tenemos 2x = 12, de donde x = 6. Punto D(6,0,0).
Para x = z = 0, tenemos 3y = 12, de donde y = 4. Punto B(0,4,0)
Para x = y = 0, tenemos 4z = 12, de donde z = 3. Punto C(0,0,3).

Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados DB y DC, es decir la mitad del módulo (|| ||) del vector producto vectorial (x) de los vectores **DB** y **DC**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**DB**x**DC**||.

DB = (-6, 4,0); **DC** = (-6, 0, 3). **AB**x**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = **i**(12 - 0) - **j**(-18 - 0) + **k**(0 + 24) = (12, 18, 24)

||**DB**x**DC**|| = $\sqrt{(12)^2+(18)^2+(24)^2}$ = $\sqrt{1044}$ = $6\sqrt{29}$
Área del triángulo es = (1/2)·||**DB**x**DC**|| = **(1/2)·$6\sqrt{29}$ u^2 = $3\sqrt{29}$ u^2**