Página 160

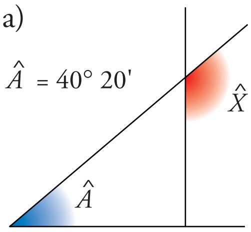
PRACTICA

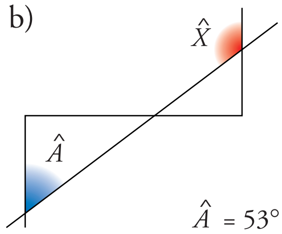
Ángulos

1 **Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada figura:**

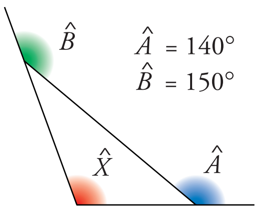
a) $\hat{x} = 180° - \hat{A} = 139°\ 40'$

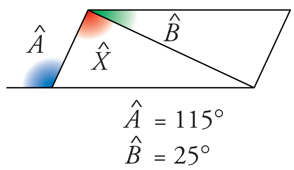
b) $\hat{x} = 180° - \hat{A} = 127°$

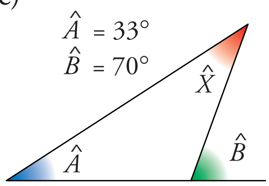
a) 

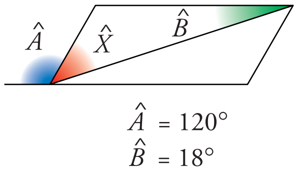
b) 

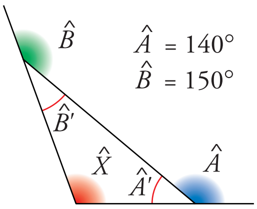
2 **Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada caso:**

a) 

b) 

c) 

d) 

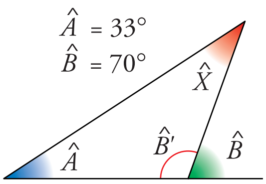
a) 

$\hat{A}' = 180° - \hat{A} = 180° - 140° = 40°$

$\hat{B}' = 180° - \hat{B} = 180° - 150° = 30°$

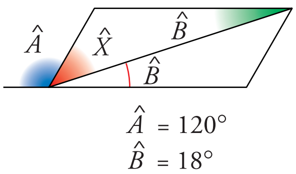
$\hat{X} = 180° - (40° + 30°) = 110°$

b) $\hat{X} = \hat{A} - \hat{B} = 115° - 25° = 90°$

c) 

$\hat{B}' = 180° - 70° = 110°$

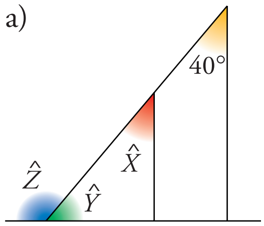
$\hat{X} = 180° - (33° + 110°) = 37°$

d) 

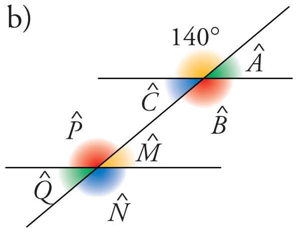
$\hat{X} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 120° - 18° = 42°$

3 **Calcula los ángulos desconocidos:**

a)



b)



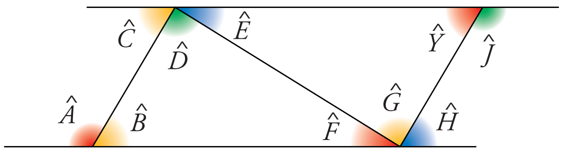
a) $\hat{X} = 40°$; $\hat{Y} = 90° - \hat{X} = 90° - 40° = 50° = \hat{Y}$

$\hat{Z} = 180° - \hat{Y} = 180° - 50° = 130°$

b) $\hat{A} = 180° - 140° = 40°$; $\hat{B} = 140°$; $\hat{C} = 40°$

$\hat{Q} = 40°$; $\hat{P} = 140°$; $\hat{M} = 40°$; $\hat{N} = 140°$

4 **¿Verdadero o falso?**



a) $\hat{A} = \hat{D} + \hat{E}$

b) $\hat{D} + \hat{B} + \hat{F} = 180°$

c) $180° - \hat{B} = \hat{A}$

d) $180° - \hat{H} = \hat{A}$

e) $\hat{G} = 180° - (\hat{E} + \hat{Y})$

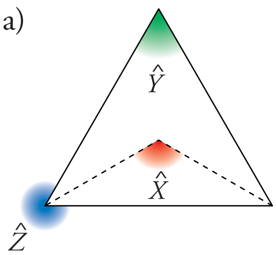
f) $\hat{A} = \hat{J}$

Todas son verdaderas.

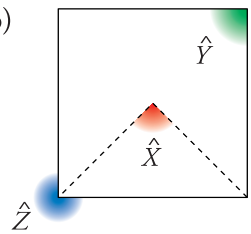
5 **ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO**

6 **Calcula los ángulos $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ en los siguientes polígonos regulares:**

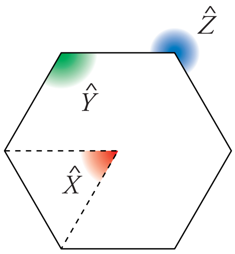
a)



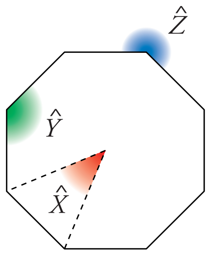
b)



c)



d)



a) $\hat{X} = \dfrac{360°}{3} = 120°$; $\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 120° = 60°$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 360° - 60° = 300°$

b) $\hat{X} = \dfrac{360°}{4} = 90°$; $\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 90° = 90°$

$\hat{Z} = 360° - 90° = 270°$

c) $\hat{X} = \dfrac{360°}{6} = 60°$; $\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 60° = 120°$

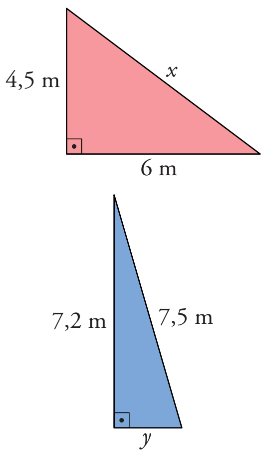
$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

d) $\hat{X} = \dfrac{360°}{8} = 45°$; $\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 45° = 135°$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 360° - 135° = 225°$

Teorema de Pitágoras

7 **En un triángulo rectángulo, los catetos miden 4,5 m y 6 m; en otro triángulo rectángulo, un cateto mide 7,2 m, y la hipotenusa 7,5 m. ¿Cuál de los dos tiene mayor perímetro?**



$x^2 = 4{,}5^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 20{,}25 + 36 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 56{,}25 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ m

Perímetro = 7,5 + 4,5 + 6 = 18 m

$7{,}5^2 = y^2 + 7{,}2^2 \rightarrow 56{,}25 = y^2 + 51{,}84 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 = 56{,}25 - 51{,}84$

$y^2 = 4{,}41 \rightarrow y = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ m

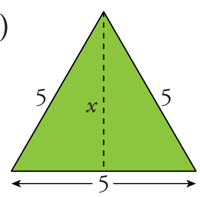
Perímetro = 7,5 + 7,2 + 2,1 = 16,8 m

El primero tiene mayor perímetro.

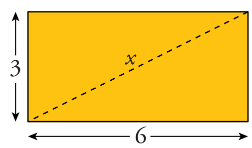
Página 161

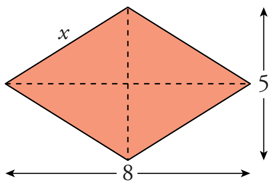
8 **Calcula el valor de x en estos polígonos:**

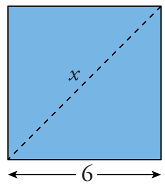
a)

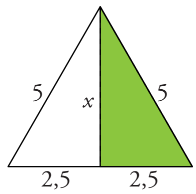


b)



c) 

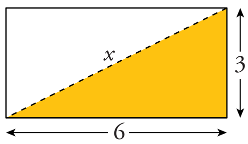
d) 

a) 

$5^2 = x^2 + 2{,}5^2 \;\rightarrow\; 25 = x^2 + 6{,}25 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75$

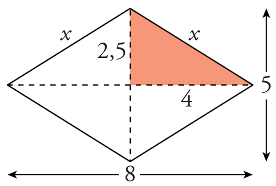
$x = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33$

b) 

$x^2 = 3^2 + 6^2 \;\rightarrow\; x^2 = 9 + 36 \;\rightarrow$

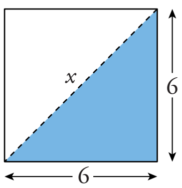
$\rightarrow\; x^2 = 45 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = \sqrt{45} \approx 6{,}71$

c) 

$x^2 = 4^2 + 2{,}5^2 \;\rightarrow\; x^2 = 16 + 6{,}25 = 22{,}25 \;\rightarrow$

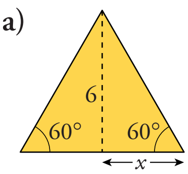
$\rightarrow\; x = \sqrt{22{,}25} \simeq 4{,}72$

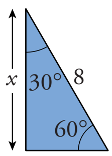
d) 

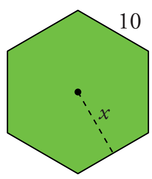
$x^2 = 6^2 + 6^2 \;\rightarrow\; x^2 = 36 + 36 = 72 \;\rightarrow$

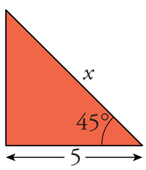
$\rightarrow\; x = \sqrt{72} \approx 8{,}49$

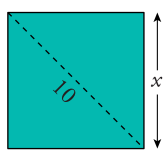
9 **Calcula x en cada caso:**

a) 

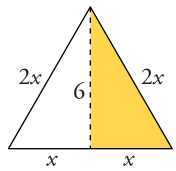
b) 

c) 

d) 

e) 

a)



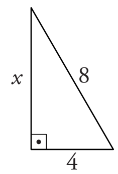
$(2x)^2 = 6^2 + x^2 \;\to\; 4x^2 = 36 + x^2 \;\to$

$\to\; 4x^2 - x^2 = 36 \;\to$

$\to\; 3x^2 = 36$

$x^2 = \dfrac{36}{3} = 12 \;\to\; x = \sqrt{12} \approx 3{,}46$

b)

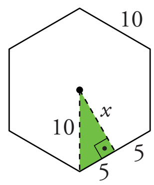


$8^2 = x^2 + 4^2 \;\to\; 64 = x^2 + 16 \;\to$

$\to\; x^2 = 64 - 16 = 48 \;\to$

$\to\; x = \sqrt{48} \approx 6{,}93$

c)

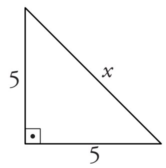


$10^2 = x^2 + 5^2 \;\to\; 100 = x^2 + 25 \;\to$

$\to\; x^2 = 100 - 25 = 75$

$x = \sqrt{75} \approx 8{,}66$

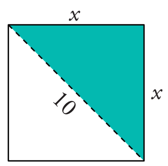
d)



$x^2 = 5^2 + 5^2 \;\to\; x^2 = 25 + 25 = 50 \;\to$

$\to\; x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

e)

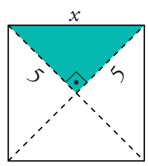


$10^2 = x^2 + x^2 \;\to\; 100 = 2x^2 \;\to$

$\to\; x^2 = 50 \;\to$

$\to\; x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

Otra forma:

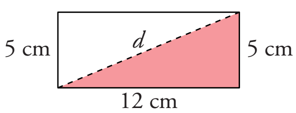


$x^2 = 5^2 + 5^2 \;\to\; x^2 = 25 + 25 = 50 \;\to$

$\to\; x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

10 **La diagonal de un rectángulo de lados 5 cm y 12 cm es igual al lado de un cuadrado. ¿Cuánto mide la diagonal de ese cuadrado?**

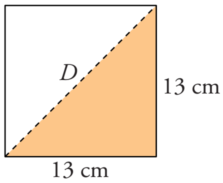
- Hallamos la longitud de la diagonal del rectángulo:



$d^2 = 12^2 + 5^2 \;\to\; d^2 = 144 + 25 = 169 \;\to$

$\to\; d = \sqrt{169} = 13$ cm

• Hallamos la longitud de la diagonal del cuadrado:



$D^2 = 13^2 + 13^2 \rightarrow D^2 = 169 + 169 = 338$

$D = \sqrt{338} \approx 18{,}38$ cm

11 **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 5 m, 6 m y 7 m. **b) 13 m, 15 m y 20 m.**

c) 45 m, 27 m y 36 m. **d) 35 m, 28 m y 46 m.**

a) $\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61 \\ c^2 = 7^2 = 49 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 + b^2 > c^2 \rightarrow \\ \rightarrow \text{Triángulo acutángulo} \end{array}$

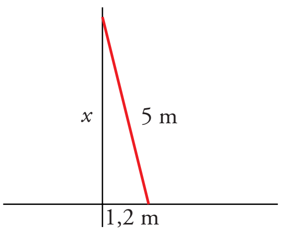
b) $\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 13^2 + 15^2 = 169 + 225 = 394 \\ c^2 = 20^2 = 400 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 + b^2 < c^2 \rightarrow \\ \rightarrow \text{Triángulo obtusángulo} \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 27^2 + 36^2 = 729 + 1\,296 = 2\,025 \\ c^2 = 45^2 = 2\,025 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \\ \rightarrow \text{Triángulo rectángulo} \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 35^2 + 28^2 = 1\,225 + 784 = 2\,009 \\ c^2 = 46^2 = 2\,116 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 + b^2 < c^2 \rightarrow \\ \rightarrow \text{Triángulo obtusángulo} \end{array}$

12 **Una escalera de 5 m de largo está apoyada en la pared. Su extremo inferior está a 1,2 m de la misma. ¿Qué altura alcanza su extremo superior?**

Llamamos x a la altura que alcanza:



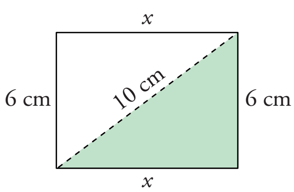
$5^2 = x^2 + 1{,}2^2 \rightarrow 25 = x^2 + 1{,}44 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 25 - 1{,}44 = 23{,}56$

$x = \sqrt{23{,}56} \simeq 4{,}85$

13 **La diagonal de un rectángulo mide 10 cm, y uno de los lados, 6 cm. Calcula su perímetro.**

Llamamos x al lado desconocido:



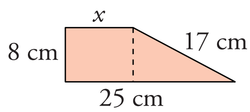
$10^2 = x^2 + 6^2 \rightarrow 100 = x^2 + 36 \rightarrow$

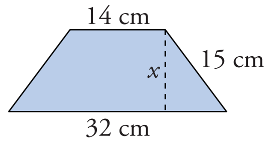
$\rightarrow x^2 = 100 - 36 = 64$

$x = \sqrt{64} = 8$

Perímetro $= 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28$ cm

14

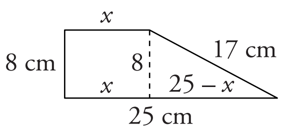




a) **Calcula** x **en cada uno de estos trapecios.**

b) **Halla la longitud de sus diagonales.**

- Hallamos el valor de x en el primer trapecio:



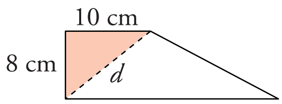
$17^2 = 8^2 + (25 - x)^2 \rightarrow$

$\rightarrow \; 289 = 64 + 625 - 50x + x^2$

$0 = x^2 - 50x + 400$

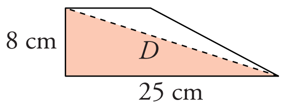
$$x = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 1\,600}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{50 \pm 30}{2} \begin{cases} x = 40 \text{ (no vale)} \\ x = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

- Hallamos la longitud de sus diagonales:



$d^2 = 10^2 + 8^2 = 100 + 64 = 164$

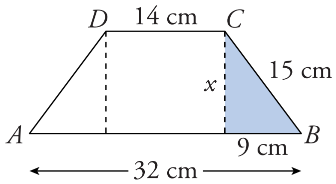
$d = \sqrt{164} \approx 12{,}81$



$D^2 = 8^2 + 25^2 = 64 + 625 = 689$

$D = \sqrt{689} \approx 26{,}25$

- Hallamos el valor de x en el segundo trapecio:



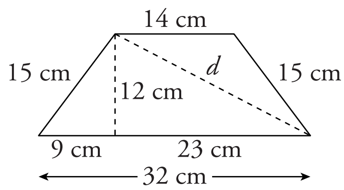
$32 - 14 = 18 \;\rightarrow\; 18 : 2 = 9$ cm

$15^2 = x^2 + 9^2 \;\rightarrow\; 225 = x^2 + 81 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 225 - 81 = 144$

$x = \sqrt{144} = 12$

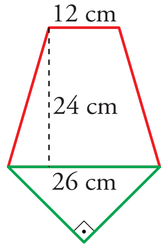
- Hallamos la longitud de sus diagonales (como es un trapecio isósceles, las dos diagonales miden lo mismo):

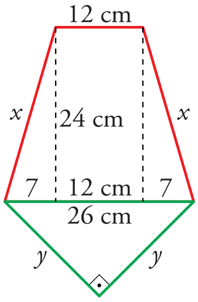


$d^2 = 23^2 + 12^2 \;\rightarrow\; d^2 = 529 + 144 = 673$

$d = \sqrt{673} \approx 25{,}94$

15 **Este pentágono se ha formado haciendo coincidir la base mayor de un trapecio isósceles con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles. Halla el perímetro del pentágono.**





Hallamos x e y:

$x^2 = 24^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 576 + 49 = 625 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{625} = 25$ cm

$26^2 = y^2 + y^2 \rightarrow 676 = 2y^2 \rightarrow y^2 = \dfrac{676}{2} = 338$

$y = \sqrt{338} \approx 18{,}38$

- El perímetro será:

$P = 12 + 2x + 2y = 12 + 50 + 36{,}76 = 98{,}76$ cm

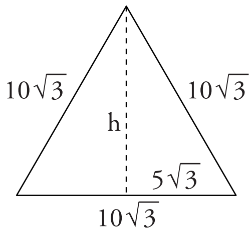
16 **En un triángulo equilátero cuyo lado mide $10\sqrt{3}$ m, calcula:**

a) La longitud de sus medianas.

b) El radio de la circunferencia inscrita.

c) El radio de la circunferencia circunscrita.

☛ ***En los triángulos equiláteros, las medianas, alturas, mediatrices y bisectrices coinciden.***



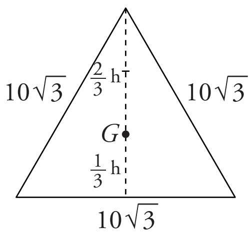
- Calculamos la longitud de su altura:

$(10\sqrt{3})^2 = h^2 + (5\sqrt{3})^2 \rightarrow 300 = h^2 + 75$

$h^2 = 300 - 75 = 225 \rightarrow h = \sqrt{225} = 15$ m

a) Como el triángulo es equilátero, las medianas coinciden con las alturas; por tanto, miden 15 m.

b)



Sabemos que el baricentro de un triángulo está a $\dfrac{2}{3}$ h de distancia del vértice y a $\dfrac{1}{3}$ h de distancia del lado (como el triángulo es equilátero, las medianas coinciden con las alturas).

Como el triángulo es equilátero, el incentro coincide con el baricentro; por tanto, el radio de la circunferencia inscrita es:

$r = \dfrac{1}{3} h = \dfrac{1}{3} \cdot 15 = 5$ m

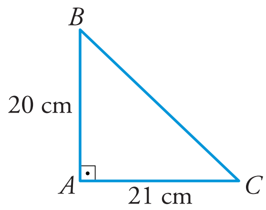
c) Con el mismo razonamiento del apartado b); y, como el circuncentro coincide también con el baricentro en un triángulo equilátero, el radio de la circunferencia circunscrita es:

$$R = \frac{2}{3}\text{ h} = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10 \text{ m}$$

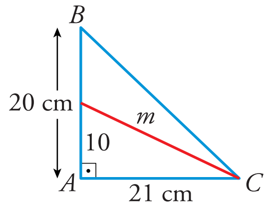
17 **a) Dibuja la mediana que sale de C y halla su longitud.**

b) Dibuja las mediatrices y halla el radio de la circunferencia circunscrita.

c) ¿Cuál es el ortocentro de ese triángulo?



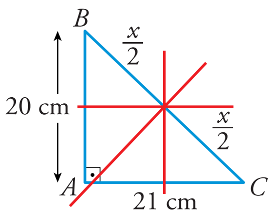
a)



$$m^2 = 21^2 + 10^2 \;\rightarrow\; m^2 = 441 + 100 = 541$$

$$m = \sqrt{541} \approx 23,26 \;\rightarrow\; m \approx 23,26$$

b)



Las mediatrices se cortan en el circuncentro; que, en este caso, es el punto medio de la hipotenusa.

Llamamos x a la longitud de la hipotenusa:

$$x^2 = 20^2 + 21^2 \;\rightarrow\; x^2 = 400 + 441 = 841 \;\rightarrow\; x = \sqrt{841} = 29 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{x}{2} = \frac{29}{2} = 14,5$$

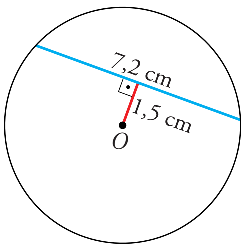
El radio de la circunferencia circunscrita mide 14,5.

c) El vértice A (el vértice opuesto a la hipotenusa).

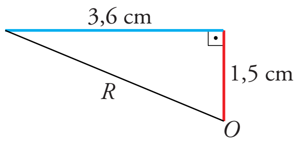
Circunferencia

18 **a) Calcula el radio de esta circunferencia.**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?



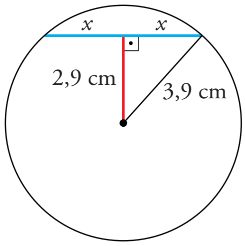
a)



$$R^2 = 3,6^2 + 1,5^2 = 12,96 + 2,25 = 15,21$$

$$R = \sqrt{15,21} = 3,9 \text{ cm}$$

b)



$3{,}9^2 = x^2 + 2{,}9^2 \;\rightarrow\; 15{,}21 = x^2 + 8{,}41$

$x^2 = 15{,}21 - 8{,}41 = 6{,}8 \;\rightarrow\; x = \sqrt{6{,}8} \approx 2{,}61$ cm

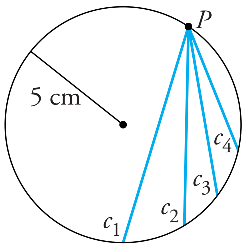
Longitud de la cuerda = $2x \approx 5{,}22$ cm

19 **Traza una circunferencia de 5 cm de radio y señala en ella un punto** ***P*****.**

a) ¿Cuántas cuerdas puedes trazar que tengan un extremo en ***P*****? ¿Cuánto mide la de longitud máxima?**

b) ¿Cuántas cuerdas hay que midan 5 cm y que tengan un extremo en ***P*****? Halla la distancia de una de esas cuerdas al centro de la circunferencia.**

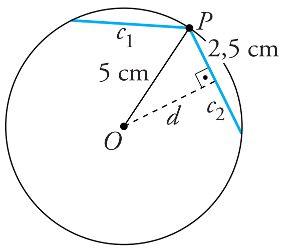
a)



— Se pueden trazar infinitas cuerdas con extremo en el punto *P*.

— La cuerda de longitud máxima es la que pasa por el centro de la circunferencia, es decir, el diámetro. Por tanto, mide 10 cm.

b) Hay dos cuerdas que midan 5 cm y que tengan un extremo en *P*:



$5^2 = d^2 + 2{,}5^2 \;\rightarrow\; 25 = d^2 + 6{,}25 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; d^2 = 25 - 6{,}25$

$d^2 = 18{,}75 \;\rightarrow\; d = \sqrt{18{,}75} \simeq 4{,}33$ cm

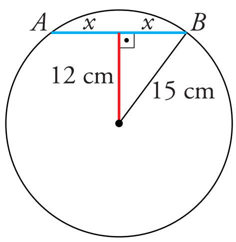
Página 162

20 **En una circunferencia de 15 cm de radio, traza una cuerda** ***AB*** **a 12 cm del centro.**

a) ¿Cuál es la longitud de ***AB*****?**

b) ¿Cuántas cuerdas de la misma longitud que ***AB*** **hay en esa circunferencia? ¿Cuántas hay que sean paralelas a** ***AB*****? ¿Cuántas hay paralelas y de la misma longitud que** ***AB*****?**

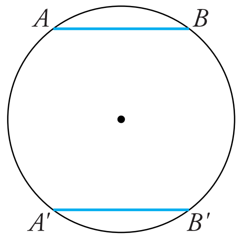
a)



$15^2 = x^2 + 12^2 \;\rightarrow\; 225 = x^2 + 144 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 225 - 144 = 81$

$x = \sqrt{81} = 9$ cm $\;\rightarrow\; \overline{AB} = 2x = 18$ cm



b) • Hay infinitas cuerdas de la misma longitud que AB.

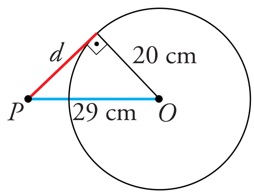
• Hay infinitas cuerdas paralelas a AB.

• Pero solo hay una cuerda de la misma longitud y paralela a AB (a 12 cm del centro de la circunferencia).

21 **a) Desde un punto P que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, se traza una tangente. Calcula la distancia de P al punto de tangencia.**

b) Trazamos otra tangente desde otro punto Q, y al medir la distancia de Q al punto de tangencia obtenemos 30 cm. ¿Cuál es la distancia de Q al centro de la circunferencia?

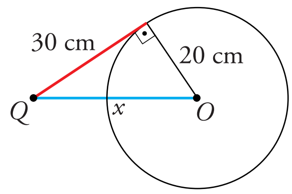
a)



$29^2 = d^2 + 20^2 \rightarrow 841 = d^2 + 400$

$d^2 = 841 - 400 = 441 \rightarrow d = \sqrt{441} = 21$ cm

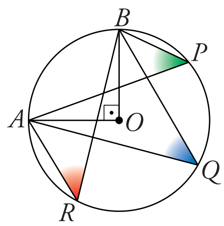
b)



$x^2 = 30^2 + 20^2 = 900 + 400 = 1\,300$

$x = \sqrt{1\,300} \approx 36{,}06$ cm

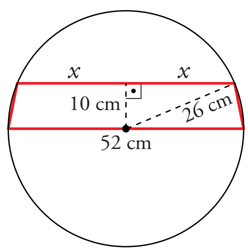
22 **¿Cuánto miden los ángulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ y $\hat{R}$ si $\widehat{AOB}$ es un ángulo recto?**



$\hat{P}$, $\hat{Q}$ y $\hat{R}$ son ángulos inscritos en una circunferencia con un arco de 90°. Por tanto, los tres ángulos miden la mitad de 90°:

$$\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = 45°$$

23 **En un círculo de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm del centro. Halla el área del cuadrilátero que se forma uniendo los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**



Se forma un trapecio. Para hallar la base menor, utilizamos el teorema de Pitágoras:

$26^2 = x^2 + 10^2 \rightarrow 676 = x^2 + 100 \rightarrow$

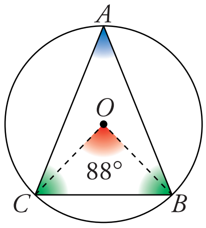
$\rightarrow x^2 = 676 - 100 = 576$

$x = \sqrt{576} = 24$ cm $\rightarrow 2x = 48$ cm

El área del trapecio es: $A = \dfrac{(b + b') \cdot h}{2} = \dfrac{(52 + 48) \cdot 10}{2} = 500 \text{ cm}^2$

24 **El triángulo ABC es isósceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$.**

¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?



El ángulo $\hat{A}$ es un ángulo inscrito en la circunferencia con arco 88°. Entonces, $\hat{A} = \dfrac{88°}{2} = 44°$.

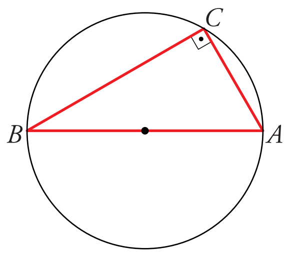
Por otra parte, $\hat{B} = \hat{C}$ por ser un triángulo isósceles.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \ \rightarrow \ 2\hat{B} + 44° = 180° \ \rightarrow \ \hat{B} = 68° = \hat{C}$

Los ángulos del triángulo son: $\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = 68°$, $\hat{C} = 68°$

25 **Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices A y B sean extremos de un diámetro y el arco $\overset{\frown}{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia.**

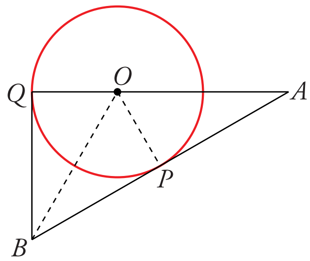
¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?



- Como $\hat{C}$ es un ángulo inscrito en la circunferencia y el lado AB es un diámetro, el ángulo $\hat{C}$ es recto, es decir: $\hat{C} = 90°$.
- Como $\overset{\frown}{AC} = \dfrac{360°}{6} = 60°$, entonces:

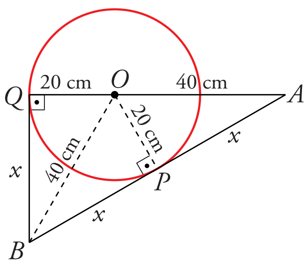
  $\hat{B} = \dfrac{60°}{2} = 30° \ \rightarrow \ \hat{A} = 90° - 30° = 60°$

26 **De esta figura conocemos:**



- **Radio: 20 cm.**
- **$\overline{OA} = \overline{OB} = 40$ cm.**
- **AB es tangente a la circunferencia en P.**
- **BQ es tangente a la circunferencia en Q.**

Calcula el perímetro y el área de los triángulos ABQ y AOB.



- Hallamos el valor de x:

  $40^2 = x^2 + 20^2 \ \rightarrow \ 1\,600 = x^2 + 400$

  $x^2 = 1\,600 - 400 = 1\,200 \ \rightarrow$

  $\rightarrow \ x = \sqrt{1\,200} \approx 34{,}64$ cm

  $2x \approx 2 \cdot 34{,}64 = 69{,}28 \text{ cm} = \overline{AB}$

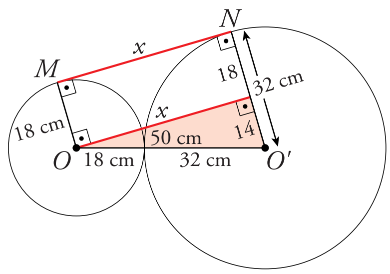
- Triángulo ABQ: $\begin{cases} \text{Perímetro} = 3x + 60 \approx 3 \cdot 34{,}64 + 60 = 163{,}92 \text{ cm} \\ \text{Área} = \dfrac{\overline{AQ} \cdot \overline{BQ}}{2} \approx \dfrac{60 \cdot 34{,}64}{2} = 1\,039{,}2 \text{ cm}^2 \end{cases}$

• Triángulo AOB: $\begin{cases} \text{Perímetro} = 40 + 40 + 2x \approx 149{,}28 \text{ cm} \\ \text{Área} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{OP}}{2} \approx \dfrac{69{,}28 \cdot 20}{2} = 692{,}8 \text{ cm}^2 \end{cases}$

27 **Dibuja dos circunferencias de centros O y O' tangentes exteriormente y de radios 18 cm y 32 cm, respectivamente. Traza una tangente común y llama M y N a los puntos de tangencia.**

a) ¿Cómo son entre sí los radios OM y $O'N$? ¿Qué cuadrilátero es la figura $OO'NM$?

b) Determina el perímetro y el área del cuadrilátero $OO'NM$.



a) Los radios OM y $O'N$ son paralelos entre sí. La figura $OO'NM$ es un trapecio rectángulo.

b) Hallamos el valor de $x = \overline{MN}$:

$50^2 = x^2 + 14^2 \ \to\ 2\,500 = x^2 + 196$

$x^2 = 2\,500 - 196 = 2\,304 \ \to$

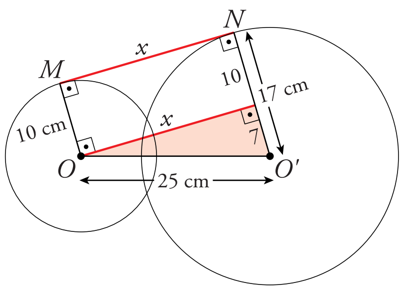
$\to\ x = \sqrt{2\,304} = 48$ cm

Perímetro = 48 + 18 + 50 + 32 = 148 cm

$\text{Área} = \dfrac{(b + b') \cdot h}{2} = \dfrac{(32 + 18) \cdot 48}{2} = 1\,200 \text{ cm}^2$

28 **Dibuja dos circunferencias secantes de radios 10 cm y 17 cm. Traza una tangente común y llama M y N a los puntos de tangencia.**

Calcula el perímetro y el área del cuadrilátero $MNOO'$ sabiendo que la distancia entre los centros, $\overline{OO'}$, es 25 cm.



La figura $MNOO'$ es un trapecio rectángulo.

Hallamos el valor de $x = \overline{MN}$:

$25^2 = x^2 + 7^2 \ \to\ 625 = x^2 + 49 \ \to$

$\to\ x^2 = 625 - 49$

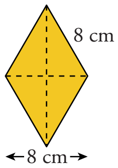
$x^2 = 576 \ \to\ x = \sqrt{576} = 24$ cm

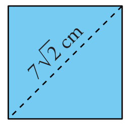
Perímetro = 17 + 24 + 10 + 25 = 76 cm

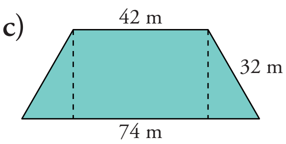
$\text{Área} = \dfrac{(b + b') \cdot h}{2} = \dfrac{(17 + 10) \cdot 24}{2} = 324 \text{ cm}^2$

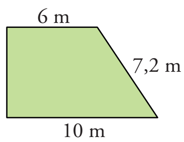
Áreas

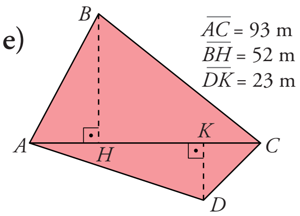
29 **Halla el área de las figuras coloreadas:**

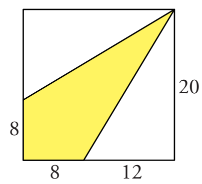
a) 

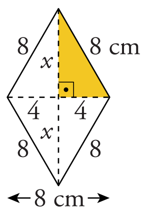
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

a) 

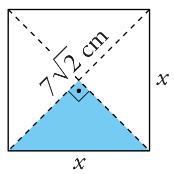
Hallamos el valor de x:

$8^2 = x^2 + 4^2 \;\rightarrow\; 64 = x^2 + 16 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 64 - 16 = 48$

$x = \sqrt{48} \approx 6{,}93 \text{ cm} \;\rightarrow\; 2x \approx 13{,}86 \text{ cm}$

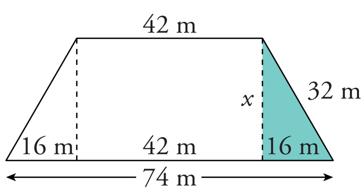
$$\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{13{,}86 \cdot 8}{2} = 55{,}44 \text{ cm}^2$$

b) 

$x^2 = (3{,}5\sqrt{2})^2 + (3{,}5\sqrt{2})^2 = 24{,}5 + 24{,}5 = 49 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 49$

$\text{Área} = x^2 = 49 \text{ cm}^2$

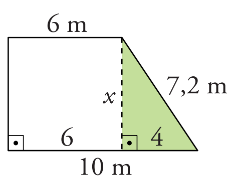
c) 

$32^2 = 16^2 + x^2 \;\rightarrow\; 1\,024 = 256 + x^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 1\,024 - 256$

$x^2 = 768 \;\rightarrow\; x = \sqrt{768} \approx 27{,}71 \text{ m}$

$$\text{Área} = \frac{(b + b') \cdot \text{h}}{2} = \frac{(74 + 42) \cdot 27{,}71}{2} = 1\,607{,}18 \text{ m}^2$$

d) 

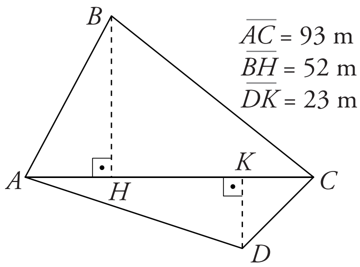
$7{,}2^2 = x^2 + 4^2 \;\rightarrow\; 51{,}84 = x^2 + 16 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 = 51{,}84 - 16$

$x^2 = 35{,}84 \;\rightarrow\; x = \sqrt{35{,}84} \simeq 5{,}99 \text{ m}$

$$\text{Área} = \frac{(b + b') \cdot h}{2} = \frac{(10 + 6) \cdot 5{,}99}{2} = 47{,}92 \text{ m}^2$$

e)



- Área del triángulo ABC:

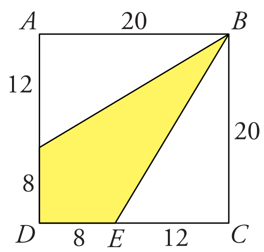
$$A_1 = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{93 \cdot 52}{2} = 2\,418 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$$A_2 = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DK}}{2} = \frac{93 \cdot 23}{2} = 1\,069{,}5 \text{ m}^2$$

- Área total = $A_1 + A_2 = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5 \text{ m}^2$

f)



- Área del cuadrado $ABCD$ →

  → $A_1 = 20^2 = 400$

- Área del triángulo BEC →

  → $A_2 = \dfrac{12 \cdot 20}{2} = 120$

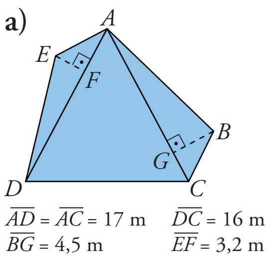
- Área coloreada = $A_1 - 2A_2 =$

  $= 400 - 240 = 160$

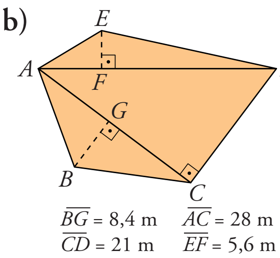
Página 163

30 Calcula el área de las figuras coloreadas:

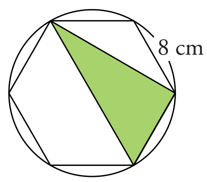
a)



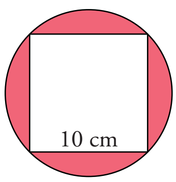
b)



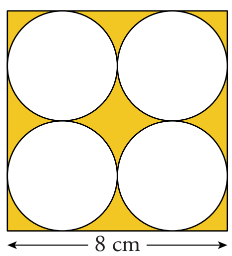
c)



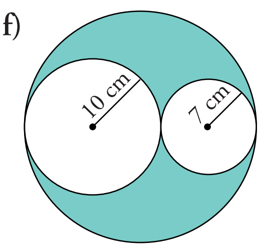
d)



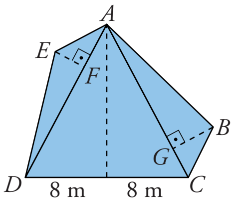
e)



f)



a)



$\overline{AD} = \overline{AC} = 17$ m $\overline{DC} = 16$ m
$\overline{BG} = 4{,}5$ m $\overline{EF} = 3{,}2$ m

- Hallamos la altura del triángulo ADC:

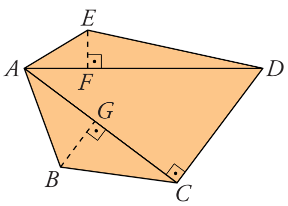
$17^2 = 8^2 + x^2 \rightarrow 289 = 64 + x^2$

$x^2 = 289 - 64 = 225 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{225} = 15$ m

- Área del triángulo $ADC \rightarrow A_1 = \dfrac{\overline{DC} \cdot x}{2} = \dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$ m^2
- Área del triángulo $ADE \rightarrow A_2 = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{2} = \dfrac{17 \cdot 3{,}2}{2} = 27{,}2$ m^2
- Área del triángulo $ABC \rightarrow A_3 = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BG}}{2} = \dfrac{17 \cdot 4{,}5}{2} = 38{,}25$ m^2
- Área total $= A_1 + A_2 + A_3 = 120 + 27{,}2 + 38{,}25 = 185{,}45$ m^2

b)



$\overline{BG} = 8{,}4$ m $\overline{AC} = 28$ m
$\overline{CD} = 21$ m $\overline{EF} = 5{,}6$ m

- Hallamos el valor de $\overline{AD} = x$

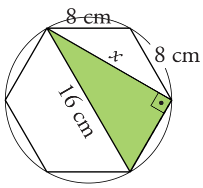
$x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 28^2 + 21^2$

$x^2 = 784 + 441 = 1\,225 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{1\,225} = 35$ m

- Área del triángulo $AED \rightarrow A_1 = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{EF}}{2} = \dfrac{35 \cdot 5{,}6}{2} = 98$ m^2
- Área del triángulo $ACD \rightarrow A_2 = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{DC}}{2} = \dfrac{28 \cdot 21}{2} = 294$ m^2
- Área del triángulo $ABC \rightarrow A_3 = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BG}}{2} = \dfrac{28 \cdot 8{,}4}{2} = 117{,}6$ m^2
- Área total $= A_1 + A_2 + A_3 = 98 + 294 + 117{,}6 = 509{,}6$ m^2

c)



- Hallamos el valor de x:

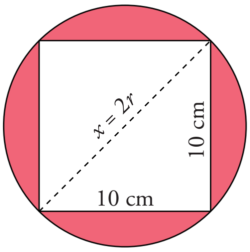
$16^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 256 = x^2 + 64 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 256 - 64 = 192$

$x = \sqrt{192} \approx 13{,}86$ cm

- Área coloreada $= \dfrac{8 \cdot x}{2} = \dfrac{8 \cdot 13{,}86}{2} = 55{,}44$ cm^2

d)



- Hallamos la longitud del diámetro de la circunferencia (diagonal del cuadrado):

$x^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200 \to$

$\to\ x = \sqrt{200}$

radio de la circunferencia $= \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{200}}{2}$

- Área del círculo $\to A_1 = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{200}}{2}\right)^2 = 3{,}14 \cdot \dfrac{200}{4} = 3{,}14 \cdot 50 = 157$ cm^2
- Área del cuadrado $\to\ A_2 = l^2 = 10^2 = 100$ cm^2
- Área coloreada $= A_1 - A_2 = 157 - 100 = 57$ cm^2

e) Cada círculo tiene radio $r = 2$ cm.

- Área de un círculo $\to\ A_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 4 = 12{,}56$ cm^2
- Área de los cuatro círculos $\to\ A_2 = 4A_1 = 4 \cdot 12{,}56 = 50{,}24$ cm^2
- Área del cuadrado $\to\ A_3 = l^2 = 8^2 = 64$ cm^2
- Área coloreada $= A_3 - A_2 = 64 - 50{,}24 = 13{,}76$ cm^2

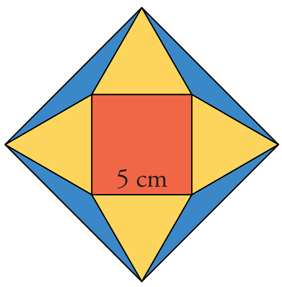
f)
- Área del círculo pequeño $\to\ A_1 = \pi \cdot 7^2 = \pi \cdot 49 = 153{,}86$ cm^2
- Área del círculo mediano $\to\ A_2 = \pi \cdot 10^2 = \pi \cdot 100 = 314$ cm^2
- Área del círculo grande $\to\ A_3 = \pi \cdot 17^2 = \pi \cdot 289 = 907{,}46$ cm^2
- Área coloreada $= A_3 - A_1 - A_2 = 907{,}46 - 153{,}86 - 314 = 439{,}6$ cm^2

31 Calcula:

a) La superficie de la zona coloreada de rojo.

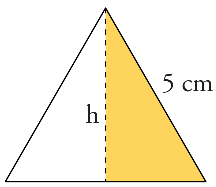
b) La superficie de la zona coloreada de amarillo.

c) La superficie de la zona coloreada de azul.



a) $S_{\text{ROJO}} = 5^2 = 25$ cm^2

b)



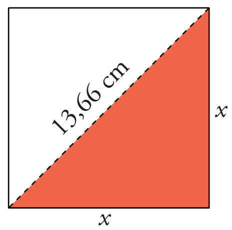
$5^2 = \text{h}^2 + 2{,}5^2 \ \to\ 25 = \text{h}^2 + 6{,}25 \ \to$

$\to\ \text{h}^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75$

$\text{h} = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33$ cm

- Área de un triángulo $= \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}825$ cm^2
- Área de los cuatro triángulos $= 4 \cdot 10{,}825 = 43{,}3$ cm$^2 = S_{\text{AMARILLO}}$

c) La diagonal del cuadrado exterior es $4{,}33 \cdot 2 + 5 = 13{,}66$ cm.



El lado del cuadrado exterior será:

$13{,}66^2 = x^2 + x^2 \to 186{,}5956 = 2x^2 \to$

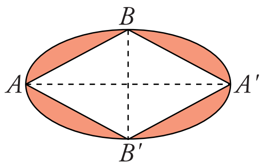
$\to x^2 = \dfrac{186{,}5956}{2}$

$x^2 = 93{,}2978 \approx 93{,}3 \text{ cm}^2$

Área del cuadrado exterior $= x^2 \approx 93{,}30 \text{ cm}^2$

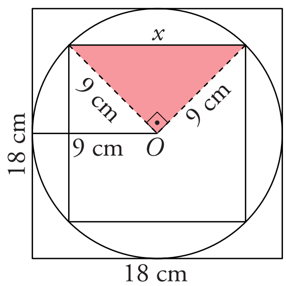
$S_{\text{AZUL}} = 93{,}3 - 25 - 43{,}3 = 25 \text{ cm}^2$

32 Las diagonales del rombo inscrito en la elipse miden 16 cm y 30 cm. Halla el área de la parte coloreada.



- Área del rombo $\to A_1 = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$
- Área de la elipse $\to A_2 = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 8 \cdot 15 = 376{,}8 \text{ cm}^2$
- Área coloreada $= A_2 - A_1 = 376{,}8 - 240 = 136{,}8 \text{ cm}^2$

33 En una circunferencia de 56,52 cm de longitud, dibuja el cuadrado circunscrito y el cuadrado inscrito. Calcula el área y el perímetro de cada cuadrado (toma $\pi = 3{,}14$).



- Hallamos el radio de la circunferencia:

$56{,}52 = 2\pi r \to r = \dfrac{56{,}52}{2\pi} = \dfrac{56{,}52}{6{,}28} = 9$ cm

- Calculamos el lado del cuadrado inscrito:

$x^2 = 9^2 + 9^2 = 81 + 81 = 162 \to$

$\to x = \sqrt{162} \approx 12{,}73$ cm

- Área del cuadrado inscrito $= x^2 = 162 \text{ cm}^2$
- Perímetro del cuadrado inscrito $= 4x = 4 \cdot 12{,}73 = 50{,}92$ cm
- Área del cuadrado circunscrito $= 18^2 = 324 \text{ cm}^2$
- Perímetro del cuadrado circunscrito $= 4 \cdot 18 = 72$ cm

34 Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:

a) 90° b) 120° c) 72° d) 153°

a) $P = \dfrac{2\pi r \cdot n°}{360°} + 2r = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 90°}{360°} + 2 \cdot 15 = 53{,}55$ cm

$A = \dfrac{\pi r^2 \cdot n°}{360°} = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 90°}{360°} = 176{,}63 \text{ cm}^2$

b) $P = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 120°}{360°} + 2 \cdot 15 = 61{,}4$ cm

$A = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 120°}{360°} = 235{,}5 \text{ cm}^2$

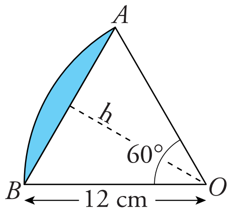
c) $P = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 72°}{360°} + 2 \cdot 15 = 48{,}84$ cm

$A = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 72°}{360°} = 141{,}3 \text{ cm}^2$

d) $P = \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 153°}{360°} + 2 \cdot 15 = 70{,}04$ cm

$A = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 153°}{360°} = 300{,}26 \text{ cm}^2$

35 Calcula el área de un segmento circular de 60° de amplitud en un círculo de 12 cm de radio.



El área del segmento circular se halla restando del área del sector, el área del triángulo.

- Área del sector: $\dfrac{\pi r^2 \cdot 60}{360°} = 75{,}4 \text{ cm}^2$

- Área del triángulo. Observa que es equilátero, ya que $\overline{OA} = \overline{OB}$ y $\widehat{AOB} = 60°$.

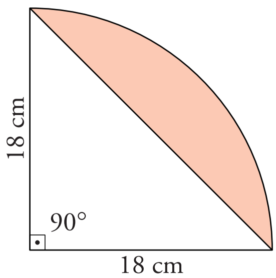
  Altura: $h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$ cm

  Área: $\dfrac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$

- Área del segmento circular:

  $A = 75{,}4 - 62{,}4 = 13 \text{ cm}^2$

36 Calcula el área de un segmento circular de 90° de amplitud en un círculo de 18 cm de radio.



- Área del sector circular:

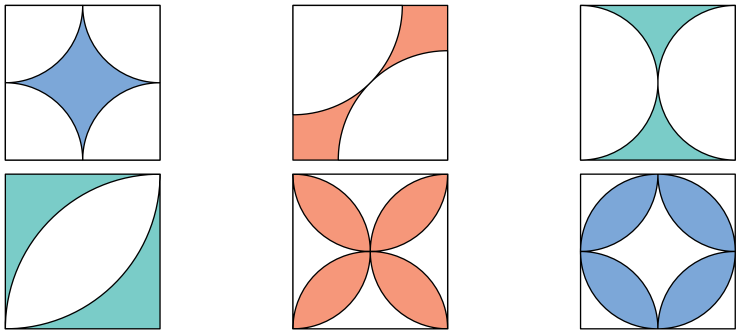
  $A_1 = \dfrac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254{,}34 \text{ cm}^2$

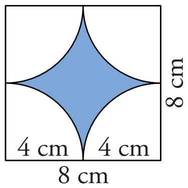
- Área del triángulo:

  $A_2 = \dfrac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$

- Área del segmento circular $= A_1 - A_2 = 254{,}34 - 162 = 92{,}34 \text{ cm}^2$

37 **Calcula el área de la parte coloreada de cada uno de estos cuadrados de 8 cm de lado.**

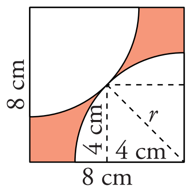




- Uniendo los cuatro sectores circulares, tenemos un círculo de radio 4 cm. El área del círculo es:

  $A_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot 16 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

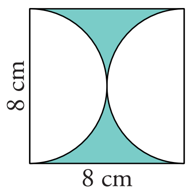
- Área del cuadrado $\rightarrow$ $A_2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$
- Área coloreada $= A_2 - A_1 = 64 - 50{,}24 = 13{,}76 \text{ cm}^2$



- Uniendo los dos sectores circulares, tenemos medio círculo, cuyo radio es la mitad de la diagonal del cuadrado. El radio del círculo mide:

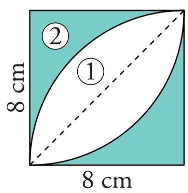
  $r^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{32} \approx 5{,}66 \text{ cm}$

- Área del semicírculo $\rightarrow$ $A_1 = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 32}{2} = 50{,}24 \text{ cm}^2$
- Área del cuadrado $\rightarrow$ $A_2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$
- Área coloreada $= A_2 - A_1 = 64 - 50{,}24 = 13{,}76 \text{ cm}^2$



- Uniendo los dos semicírculos, tenemos un círculo de radio 4 cm.
- El área coloreada será igual que en la primera figura:

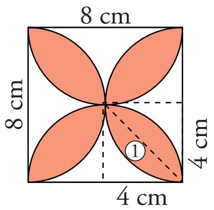
  $A_T = 13{,}76 \text{ cm}^2$



- 1 Es un segmento circular de 90° en un círculo de 8 cm de radio. El área del sector circular correspondiente $\left(\text{que es } \dfrac{1}{4} \text{ de círculo}\right)$ es:

  $A_1 = \dfrac{\pi 8^2}{4} = \dfrac{\pi \cdot 64}{4} = \pi \cdot 16 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

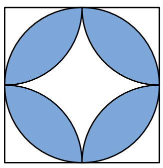
- El área del triángulo correspondiente es: $A_2 = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32 \text{ cm}^2$
- El área del segmento circular 1 es: $A_3 = A_1 - A_2 = 50,24 - 32 = 18,24$ cm
- El área de 2 es: $A_4 = A_2 - A_3 = 32 - 18,24 = 13,76 \text{ cm}^2$
- Área coloreada $= 2 \cdot A_4 = 2 \cdot 13,76 = 27,52 \text{ cm}^2$



- Tomamos un cuarto del cuadrado. 1 es un segmento circular de 90° en un círculo de 4 cm de radio. El área del sector circular correspondiente $\left(\text{que es } \dfrac{1}{4} \text{ de círculo}\right)$ es:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = \pi \cdot 4 = 12,56 \text{ cm}^2$$

- El área del triángulo correspondiente es: $A_2 = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$
- El área del segmento circular 1 es: $A_3 = A_1 - A_2 = 12,56 - 8 = 4,56 \text{ cm}^2$
- Área coloreada $= 8 \cdot A_3 = 8 \cdot 4,56 = 36,48 \text{ cm}^2$



- El área coloreada coincide con la de la figura anterior. Por tanto, su área es $A_T = 36,48 \text{ cm}^2$.

PIENSA Y RESUELVE

38 Halla el radio de un arco de 100,48 m de longitud y 72° de apertura.

- Calculamos la longitud de la circunferencia:

$$\frac{l}{360°} = \frac{100,48}{72°} \rightarrow l = 502,4 \text{ m}$$

- Hallamos el radio: $2\pi r = 502,4$ m

$$2\pi r = 502,4 \text{ m} \rightarrow r = \frac{502,4}{2\pi} = \frac{502,4}{6,28} = 80 \text{ m}$$

Página 164

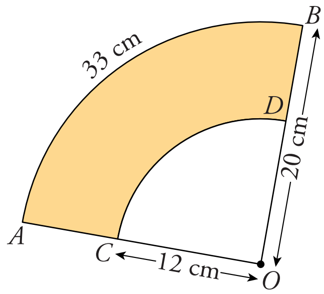
39 Calcula la medida, en grados, de un arco de 31,4 cm correspondiente a una circunferencia de 471 cm de longitud.

$$\frac{471 \text{ cm}}{360°} = \frac{31,4 \text{ cm}}{x} \rightarrow x = \frac{31,4 \cdot 360°}{471} = 24°$$

El arco mide 24°.

40 **a) Calcula la apertura del sector *OAB*.**

b) Halla el área de la parte sombreada como diferencia de los sectores *OAB* y *OCD*.



a) La longitud de la circunferencia exterior completa es:

$2\pi \cdot 20 = 125{,}6$ cm. Por tanto:

$$\frac{125{,}6}{360°} = \frac{33}{x} \rightarrow x = \frac{360° \cdot 33}{125{,}6} = 94{,}59° = 94°\ 35'\ 10''$$

b) • Área del sector *OAB* $\rightarrow A_1 = \dfrac{\pi r^2 \cdot 94{,}59°}{360°} =$

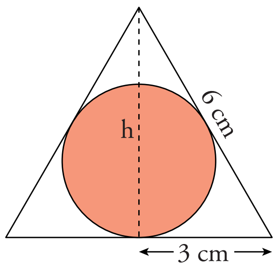
$$= \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 94{,}59°}{360°} = 330{,}01 \text{ cm}^2$$

• Área del sector *OCD* $\rightarrow A_2 = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 94{,}59°}{360°} = 118{,}81 \text{ cm}^2$

• Área sombreada $= A_1 - A_2 = 330{,}01 - 118{,}81 = 211{,}2 \text{ cm}^2$

41 **¿Cuál es el diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por un agujero triangular cuyos tres lados miden 6 cm?**

• Como el triángulo es equilátero, las bisectrices coinciden con las medianas y con las alturas, y el incentro con el baricentro. Por tanto, el diámetro de la circunferencia inscrita en el triángulo es igual a $\frac{2}{3}$ de su altura, h.



• Hallamos la altura del triángulo:

$6^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow 36 = h^2 + 9 \rightarrow$

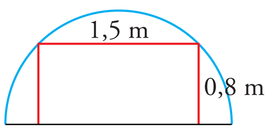
$\rightarrow h^2 = 36 - 9 = 27$

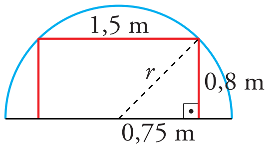
$h = \sqrt{27}$

• El diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por el agujero triangular es:

$$d = \frac{2}{3}\,h = \frac{2}{3}\sqrt{27} \approx 3{,}46 \text{ cm}$$

42 **Se va a perforar un túnel por el que circulará una vagoneta de 1,5 m de ancho por 0,8 m de alta. ¿Qué diámetro mínimo debe tener la sección del túnel?**





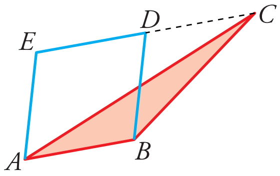
• Hallamos r:

$r^2 = 0,8^2 + 0,75^2 = 0,64 + 0,5625 = 1,2025$

$r = \sqrt{1,2025} \approx 1,10$ m $\rightarrow$ Diámetro $= 2r = 2,20$ m

Debe tener un diámetro de más de 2,20 m.

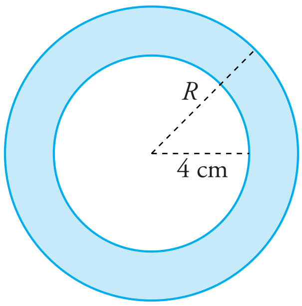
43 **Si el área del triángulo *ABC* es 9,10 cm², ¿cuál es el área del paralelogramo *ABDE*?**



Tomando como base del triángulo el lado *AB*, la altura del triángulo coincide con la altura del paralelogramo *ABDE*. Por tanto, el triángulo y el paralelogramo tienen la misma base y la misma altura. Así, el área del paralelogramo será el doble del área del triángulo, es decir:

$A = 2 \cdot 9,10 = 18,20$ cm^2

44 **El área de una corona circular es 20π cm², y la circunferencia interna mide 8π cm. Calcula el radio de la circunferencia externa.**



• Hallamos el radio de la circunferencia interna:

$2\pi r = 8\pi \rightarrow r = \dfrac{8\pi}{2\pi} = 4$ cm

• El área de la corona circular es:

$\pi R^2 - \pi \cdot 4^2 = 20\pi \rightarrow \pi R^2 - \pi \cdot 16 = 20\pi$

$\pi (R^2 - 16) = 20\pi \rightarrow R^2 - 16 = 20 \rightarrow$

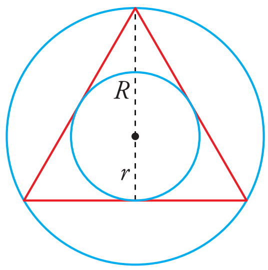
$\rightarrow R^2 = 20 + 16 = 36$

$R = \sqrt{36} = 6$ cm

45 **La longitud de la circunferencia inscrita a un triángulo equilátero es 20 cm.**

a) ¿Cuánto mide la circunferencia circunscrita?

b) ¿Cuál es el perímetro del triángulo?



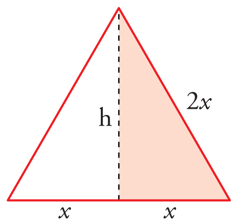
a) Como el triángulo es equilátero, las bisectrices, mediatrices, medianas y alturas coinciden (el incentro, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro coinciden). El radio de la circunferencia circunscrita es el doble del radio de la circunferencia inscrita. Por tanto, la longitud de la circunferencia circunscrita también es el doble:

$L = 2\pi R = 2\pi \cdot (2r) = 2 \cdot (2\pi r) = 2 \cdot 20 = 40$ cm

b) • Calculamos el radio de la circunferencia inscrita, r, para hallar la altura del triángulo:

$2\pi r = 20$ cm $\rightarrow r = \dfrac{20}{2\pi} = \dfrac{20}{6,28} \approx 3,18$ cm

- Altura del triángulo $\rightarrow$ $h = 3r = 3 \cdot 3{,}18 = 9{,}54$ cm
- Hallamos el lado del triángulo.



$(2x)^2 = x^2 + h^2 \rightarrow 4x^2 = x^2 + 91{,}0116$

$4x^2 - x^2 = 91{,}0116 \rightarrow 3x^2 = 91{,}0116 \rightarrow$

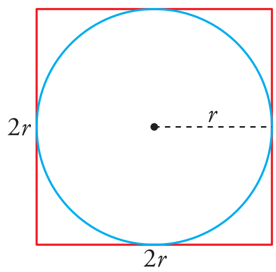
$\rightarrow x^2 = 30{,}3372$

$x = \sqrt{30{,}3372} \approx 5{,}51$ cm $\rightarrow$

$\rightarrow$ Lado $= 2x = 2 \cdot 5{,}51 = 11{,}02$ cm

- Perímetro del triángulo $= 3 \cdot 11{,}02 = 33{,}06$ cm

46 **La superficie del círculo inscrito a un cuadrado es de 12,56 cm^2. ¿Cuál es la superficie del cuadrado?**

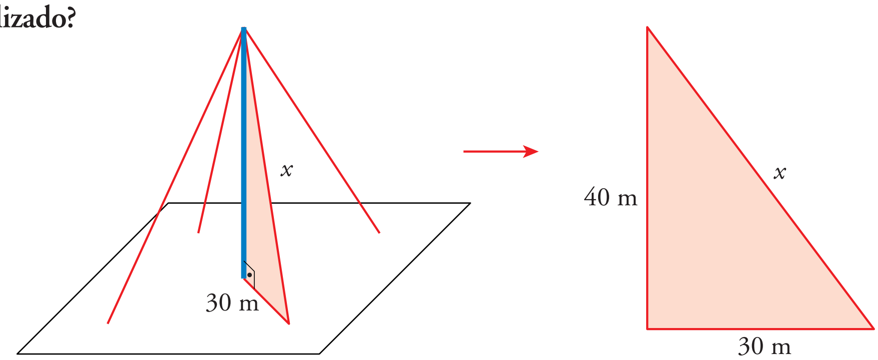


- El lado del cuadrado es igual al diámetro del círculo. Si llamamos r al radio del círculo, el lado del cuadrado será $2r$.

- El área del cuadrado es: $A_1 = (2r)^2 = 4r^2$
- El área del círculo es: $\pi r^2 = 12{,}56 \rightarrow r^2 = \dfrac{12{,}56}{\pi} = 4$
- Por tanto, el área del cuadrado será:

  $A = 4r^2 = 4 \cdot 4 = 16$ cm^2

47 **Una antena está sujeta por 4 tirantes de cable. El extremo superior de cada tirante se sujeta a la antena a una altura de 40 m. El extremo inferior está amarrado al suelo a una distancia de 30 m de la base. ¿Cuántos metros de cable se han utilizado?**



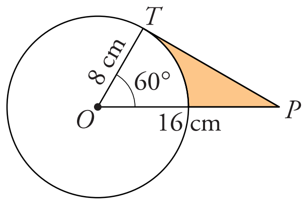
- La longitud de uno de los cables es:

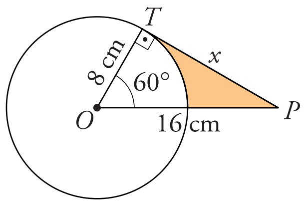
  $x^2 = 40^2 + 30^2 = 1\,600 + 900 = 2\,500 \rightarrow x = \sqrt{2\,500} = 50$ m
- Como hay 4 cables iguales, entonces, se han utilizado: $4 \cdot 50 = 200$ m de cable.

48 Calcula:

a) La longitud de PT.

b) El área de la parte coloreada.





a) Llamamos $x = \overline{PT}$:

$16^2 = x^2 + 8^2 \rightarrow 256 = x^2 + 64 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 192$

$x = \sqrt{192} \approx 13{,}86$ cm

b) • El área del triángulo OPT es:

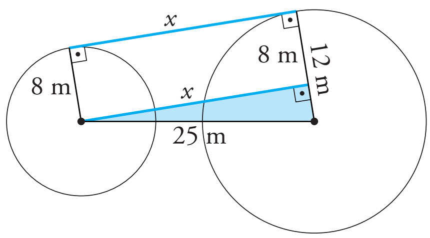
$$A_1 = \frac{8 \cdot 13{,}86}{2} = 55{,}44 \text{ cm}^2$$

• El área del sector circular es:

$$A_2 = \frac{\pi r^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 60}{360°} = 33{,}49 \text{ cm}^2$$

• Área coloreada $= A_1 - A_2 = 55{,}44 - 33{,}49 = 21{,}95$ cm^2

49 Los radios de dos circunferencias son $r_1 = 8$ m y $r_2 = 12$ m. La distancia entre sus centros es 25 m. Halla las longitudes de los segmentos de tangente común externa e interna.

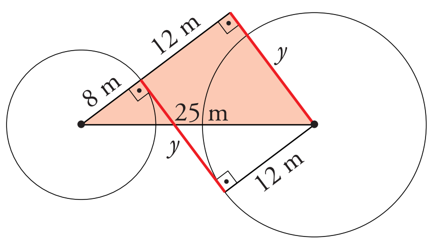


• Longitud del segmento de tangente común externa:

$25^2 = x^2 + 4^2 \rightarrow 625 = x^2 + 16$

$x^2 = 625 - 16 = 609 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{609} \approx 24{,}68$ m



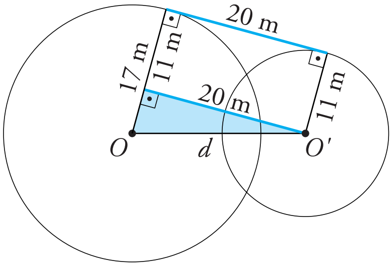
• Longitud del segmento de tangente común interna:

$25^2 = y^2 + 20^2 \rightarrow 625 = y^2 + 400$

$y^2 = 625 - 400 = 225 \rightarrow$

$\rightarrow y = \sqrt{225} \approx 15$ m

50 El segmento de la tangente común exterior de dos circunferencias mide 20 cm, y sus radios son $r_1 = 11$ cm y $r_2 = 17$ cm. Averigua si las circunferencias son secantes o exteriores.



- Hallamos la distancia, d, entre los centros de las circunferencias:

  $d^2 = 20^2 + 6^2 = 400 + 36 = 436 \rightarrow$

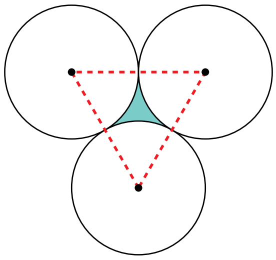
  $\rightarrow d = \sqrt{436} \approx 20{,}88$ cm

- La suma de las longitudes de los radios es:

  $r_1 + r_2 = 11 + 17 = 28 \text{ cm} > 20{,}88$ cm

- Por tanto, las circunferencias son secantes.

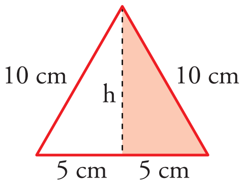
51 **Calcula el área del triángulo curvilíneo comprendido entre tres circunferencias tangentes de radio 5 cm.**



- El triángulo dibujado en rojo es equilátero, luego cada sector circular tiene una amplitud de 60° y radio 5 cm.

- Área de un sector $\rightarrow A_1 = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 60°}{360°} = 13{,}08 \text{ cm}^2$

- Hallamos la altura del triángulo y calculamos su área:



$10^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow 100 = h^2 + 25 \rightarrow$

$\rightarrow h^2 = 100 - 25 = 75$

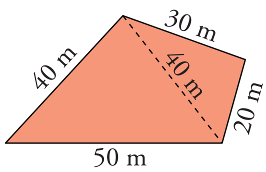
$h = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

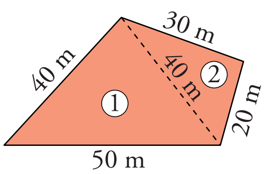
- Área del triángulo $\rightarrow A_2 = \dfrac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}3 \text{ cm}^2$

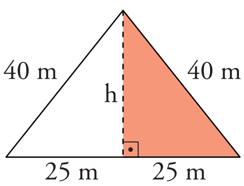
- Área del triángulo curvilíneo $= A_2 - 3\,A_1 = 43{,}3 - 13{,}08 =$

  $= 43{,}3 - 39{,}24 = 4{,}06 \text{ cm}^2$

52 **Cierta finca tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**







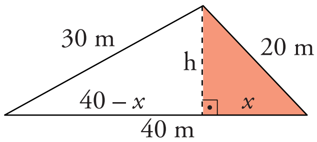
- Hallamos el área del triángulo 1:

  $40^2 = h^2 + 25^2 \rightarrow 1\,600 = h^2 + 625$

  $h^2 = 1\,600 - 625 = 975 \rightarrow h = \sqrt{975} \approx 31{,}22$ m

  Área $\rightarrow A_1 = \dfrac{50 \cdot 31{,}22}{2} = 780{,}5 \text{ m}^2$

- Hallamos el área del triángulo ②:



$$\left.\begin{array}{l}20^2 = h^2 + x^2\\ 30^2 = h^2 + (40-x)^2\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}h^2 = 400 - x^2\\ h^2 = 900 - (40-x)^2\end{array}\right\}$$

$400 - x^2 = 900 - (1\,600 - 80x + x^2)$

$400 - x^2 = 900 - 1\,600 + 80x - x^2 \ \to\ 1\,100 = 80x \ \to$

$\to\ x = \dfrac{1\,100}{80} = 13{,}75$ m

$h^2 = 400 - x^2 = 400 - 13{,}75^2 = 210{,}9375$

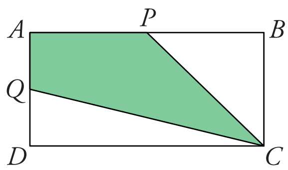
$h = \sqrt{210{,}9375} \approx 14{,}52$ m

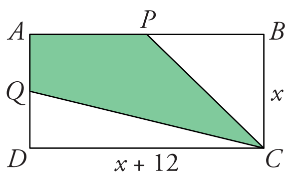
Área $\to\ A_2 = \dfrac{40 \cdot 14{,}52}{2} = 290{,}4\ m^2$

- Área total $= A_1 + A_2 = 780{,}5 + 290{,}4 = 1\,070{,}9\ m^2$

53 **El perímetro de este rectángulo es 96 m, y la base mide 12 m más que la altura.**

Halla el área de la parte coloreada. (*P* y *Q* son los puntos medios de los lados *AB* y *AD*, respectivamente).





- Perímetro $= 2(x + x + 12) = 2(2x + 12) = 4x + 24$

$4x + 24 = 96 \ \to\ 4x = 72 \ \to\ x = \dfrac{72}{4} = 18$ m

$x + 12 = 18 + 12 = 30$ m

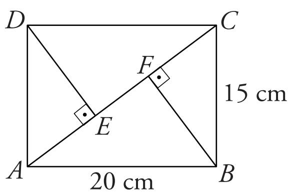
- Área del rectángulo $ABCD \ \to\ A_1 = \overline{DC} \cdot \overline{BC} = 30 \cdot 18 = 540\ m^2$
- Área del triángulo $PBC \ \to\ A_2 = \dfrac{\overline{PB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{15 \cdot 18}{2} = 135\ m^2$
- Área del triángulo $QDC \ \to\ A_3 = \dfrac{\overline{DC} \cdot \overline{QD}}{2} = \dfrac{30 \cdot 9}{2} = 135\ m^2$
- Área coloreada $= A_1 - A_2 - A_3 = 540 - 135 - 135 = 270\ m^2$

54 **Observando esta figura, halla:**

a) El área del triángulo *ABC*.

b) La longitud del segmento *BF* (altura sobre la hipotenusa del triángulo *ABC*).

c) La longitud del segmento *EF*.



- Área del triángulo ABC:

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150$$

- Longitud del segmento $AC = x$:

$$x^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 \ \rightarrow \ x = \sqrt{625} = 25 = \overline{AC}$$

- Longitud del segmento BF:

Área del triángulo ABC $\rightarrow$ $A_1 = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BF}}{2}$ $\rightarrow$ $150 = \dfrac{25 \cdot \overline{BF}}{2}$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\overline{BF} = 12$

- Longitud del segmento EF:

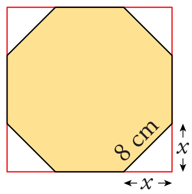
$$\overline{AE} = \overline{FC} = y \ \rightarrow \ 15^2 = y^2 + 12^2 \ \rightarrow \ 225 = y^2 + 144 \ \rightarrow \ y^2 = 81 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ y = \sqrt{81} = 9$$

$$\overline{EF} = \overline{AC} - \overline{AE} - \overline{FC} = 25 - 9 - 9 = 7$$

Página 165

55 Calcula el área de un octógono regular de 8 cm de lado.



- Hallamos el valor de x:

$$8^2 = x^2 + x^2 \ \rightarrow \ 64 = 2x^2 \ \rightarrow \ x^2 = \frac{64}{2} = 32 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x^2 = 32 \ \rightarrow \ x = \sqrt{32} \simeq 5{,}66 \text{ cm}$$

- Área del triangulito:

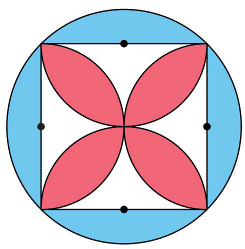
$$A_1 = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

- Área del cuadrado:

$$A_2 = (8 + 2x)^2 = (8 + 2 \cdot 5{,}66)^2 = 373{,}26 \text{ cm}^2$$

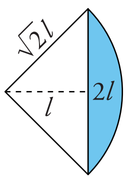
- Área del octógono $= A_2 - 4A_1 = 373{,}26 - 4 \cdot 16 = 373{,}26 - 64 = 309{,}26 \text{ cm}^2$

56 Prueba que el área de la zona coloreada en azul es igual a la de la zona coloreada en rojo.



Tomamos $2l$ como lado del cuadrado.

- Calculamos el área de una de las cuatro zonas azules:



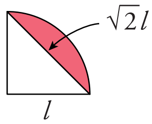
Área del triángulo $\rightarrow$ $A_T = \dfrac{2l \cdot l}{2} = l^2$

Área del sector $\rightarrow$ $A_S = \dfrac{\pi \cdot 2l^2 \cdot 90°}{360°} = \dfrac{\pi}{2} l^2$

Área sombreada $\rightarrow$ $A = A_S - A_T = \frac{\pi}{2}l^2 - l^2 = l^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Hay cuatro zonas como esta $\rightarrow$ el área de color azul es: $4l^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

- Calculamos el área de una de las cuatro zonas rojas:



Área del triángulo $\rightarrow$ $A_T = \frac{l \cdot l}{2} = \frac{l^2}{2}$

Área del sector $\rightarrow$ $A_S = \frac{\pi \cdot l^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi}{4}l^2$

Área sombreada $\rightarrow$ $A = A_S - A_T = \frac{\pi}{4}l^2 - \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Hay ocho zonas como esta $\rightarrow$ el área de color rojo es:

$$8\frac{l^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 4l^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

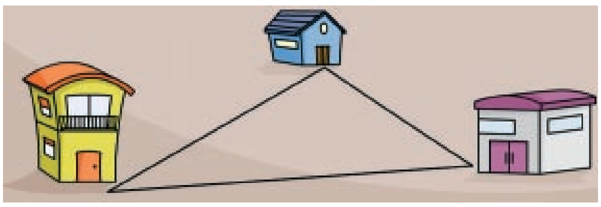
Vemos que las áreas de ambos colores coinciden.

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

57 ¿Qué se puede afirmar de un triángulo si uno de los lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita?

Que es un triángulo rectángulo.

58 ¿Dónde ha de perforarse un pozo para que esté a la misma distancia de las tres casas? Explica qué harías para solucionar el problema.

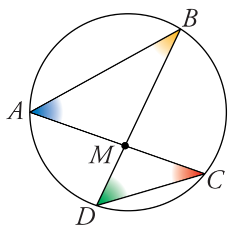


El pozo lo perforaríamos en el circuncentro, que es el punto que se encuentra a igual distancia de los tres vértices del triángulo formado por las tres casas.

59 Investiga. ¿Qué condición ha de cumplir un triángulo para contener a su circuncentro? ¿Y para que este sea exterior al triángulo? (Empieza probando qué ocurre con los triángulos rectángulos).

- Un triángulo acutángulo tiene su circuncentro en su interior.
- Un triángulo rectángulo tiene su circuncentro en la hipotenusa.
- El circuncentro es exterior si el triángulo es obtusángulo.

60 **Justifica por qué los triángulos *ABM* y *CDM* tienen los ángulos iguales. ¿Cómo son esos triángulos?**



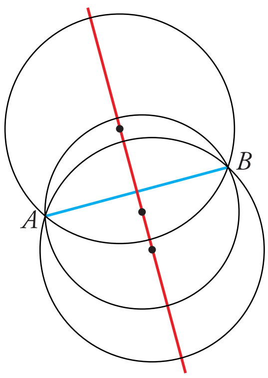
- Como $\widehat{ACD}$ y $\widehat{ABD}$ tienen el mismo arco, entonces $\hat{B} = \hat{C}$.
- Análogamente, $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BCD}$ tienen el mismo arco. Por lo tanto: $\hat{A} = \hat{D}$
- Además, *M* es un punto común a los dos triángulos y crea dos ángulos opuestos por el vértice. Por tanto son iguales.
- Entonces *ABM* y *CDM* son dos triángulos con los ángulos iguales. Ambos triángulos son semejantes.

61 **a) Señala en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *A* y *B* y traza varias circunferencias de distinto radio que pasen por *A* y por *B*.**

b) ¿Cuántas posibilidades hay?

c) ¿Dónde se encuentran los centros de esas circunferencias?

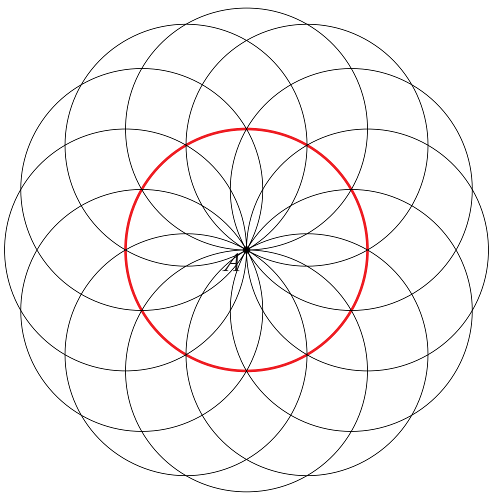
a)



b) Hay infinitas posibilidades.

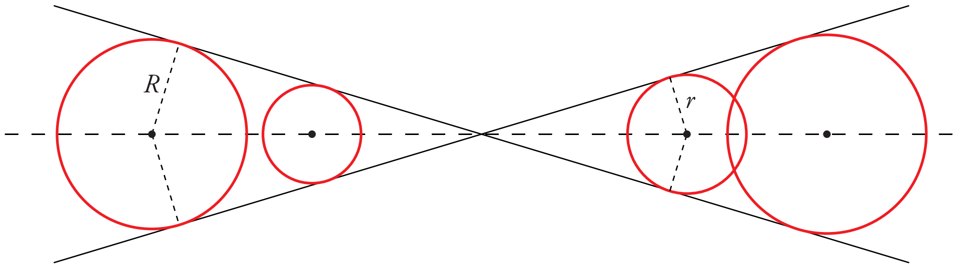
c) Los centros se encuentran en la mediatriz del segmento *AB*.

62 **Señala en tu cuaderno un punto *A* y traza varias circunferencias de radio 3 cm que pasen por *A*. ¿Qué figura forman los centros?**



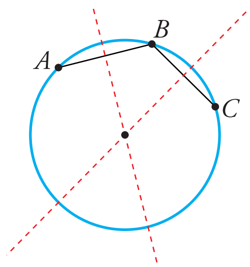
Los centros de estas circunferencias forman otra circunferencia, de radio 3 cm, cuyo centro está en el punto *A*.

63 **Traza dos rectas que se corten y dibuja varias circunferencias tangentes a esas rectas. ¿Dónde están los centros de esas circunferencias?**



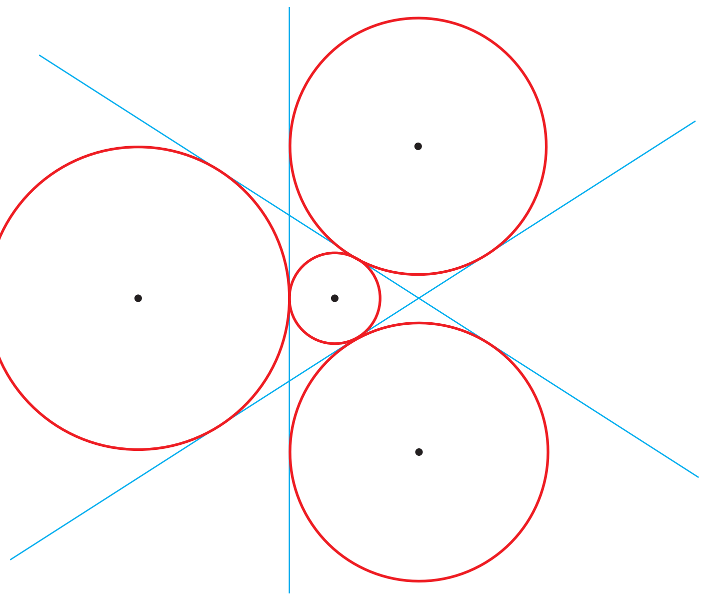
Los centros de estas circunferencias se encuentran en las bisectrices de los ángulos formados por las rectas.

64 ***A*, *B* y *C* son tres puntos no alineados. Dibuja una circunferencia que pase por *A*, *B* y *C*. ¿Hay más de una posibilidad?**



- Solo hay una posibilidad de trazar una circunferencia que pase por tres puntos no alineados.
- El centro de la circunferencia es el punto de corte de la mediatriz del segmento *AB* con la mediatriz del segmento *BC*.

65 **Traza tres rectas que se corten dos a dos y dibuja una circunferencia que sea tangente a las tres. ¿Es cierto que existen cuatro posibilidades?**



Hay cuatro posibilidades.

66 **Comprueba que si m es un número cualquiera mayor que 1, los números m, $\frac{m^2-1}{2}$ y $\frac{m^2+1}{2}$ son una "terna pitagórica".**

☛ *a, b y c son una "terna pitagórica" cuando $a^2 + b^2 = c^2$.*

- Tenemos que probar que $m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$. Veámoslo:

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{m^4-2m^2+1}{4} = \frac{4m^2}{4} + \frac{m^4-2m^2+1}{4} =$$

$$= \frac{m^4+2m^2+1}{4} = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

- Dando valores a m, podemos obtener ejemplos de ternas pitagóricas:

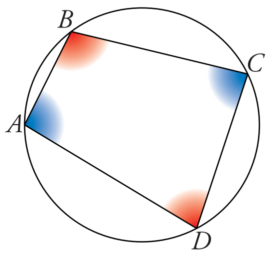
$m = 2 \rightarrow \left(2, \frac{3}{2} \text{ y } \frac{5}{2}\right)$; $m = 3 \rightarrow (3, 4 \text{ y } 5), \dots$

PROFUNDIZA

67 **El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:**

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}, \quad \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

$$\hat{C} + \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$



Comprueba de igual forma que $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

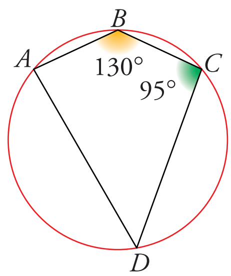
Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}; \quad \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}; \quad \hat{B} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

La suma de los ángulos opuestos (enfrentados) del cuadrilátero ha de ser 180°.

68 **Calcula los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$.**

(Ten en cuenta el problema anterior).



Teniendo en cuenta el problema anterior:

$\hat{B} + \hat{D} = 180° \rightarrow 130° + \hat{D} = 180° \rightarrow$

$\rightarrow \hat{D} = 180° - 130° = 50°$

$\hat{A} + \hat{C} = 180° \rightarrow \hat{A} + 95° = 180° \rightarrow \hat{A} = 180° - 95° = 85°$