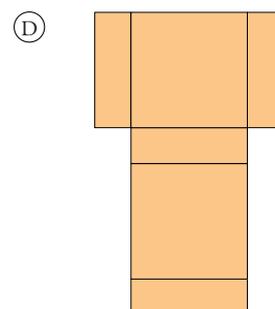
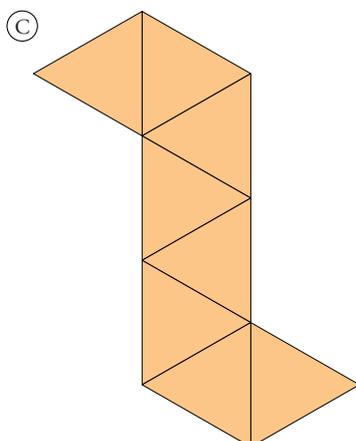
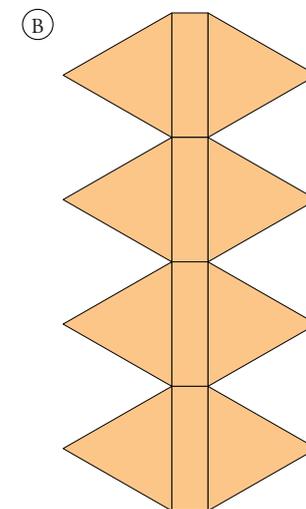
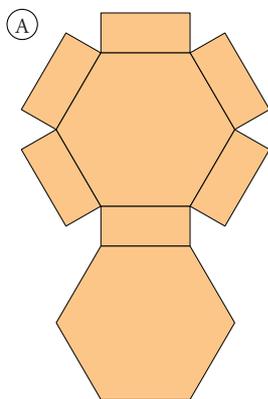
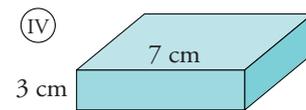
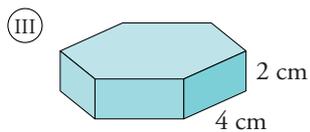
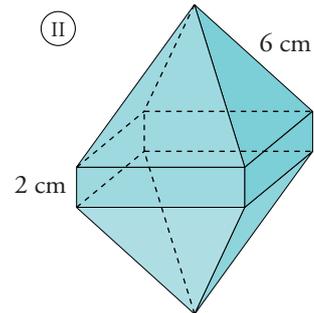
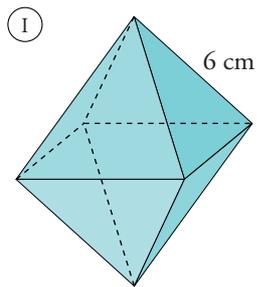


Página 185

PRACTICA

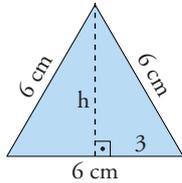
Desarrollos y áreas

1 Haz corresponder cada figura con su desarrollo y calcula el área total:



I → C

- Área de una cara:



$$6^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow 36 = h^2 + 9 \rightarrow h^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow$$

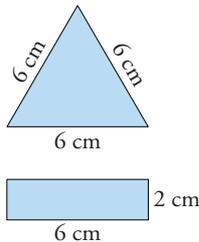
$$\rightarrow h = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$$

- Área total = $8 \cdot 15,6 = 124,8 \text{ cm}^2$

II → B

- Área de una cara:

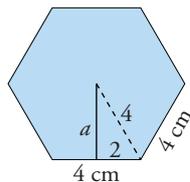


- Área triángulo = $15,6 \text{ cm}^2$
- Área de los 8 triángulos = $124,8 \text{ cm}^2$ } (ver apartado anterior)
- Área rectángulo = $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$
- Área de los 4 rectángulos = $4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$

- Área total = $124,8 + 48 = 172,8 \text{ cm}^2$

III → A

- Área de una cara hexagonal:

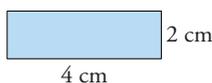


$$4^2 = a^2 + 2^2 \rightarrow 16 = a^2 + 4 \rightarrow a^2 = 16 - 4 = 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \sqrt{12} \approx 3,46 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{24 \cdot 3,46}{2} = 41,52 \text{ cm}^2$$

- Área de las dos caras hexagonales = $2 \cdot 41,52 = 83,04 \text{ cm}^2$
- Área de una cara lateral = $4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$

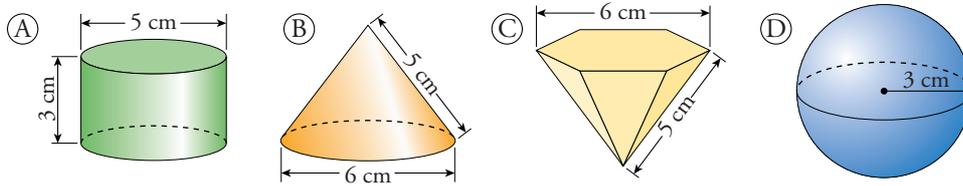


- Área lateral = $6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$
- Área total = $83,04 + 48 = 131,04 \text{ cm}^2$

IV → D

- Área de una base = $7^2 = 49 \text{ cm}^2$
- Área de las dos bases = $49 \cdot 2 = 98 \text{ cm}^2$
- Área lateral = $4 \cdot (7 \cdot 3) = 4 \cdot 21 = 84 \text{ cm}^2$
- Área total = $98 + 84 = 182 \text{ cm}^2$

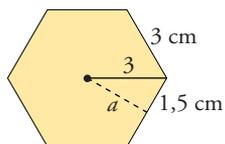
2 Calcula la superficie total de cada cuerpo:



- (A) • Área lateral = $2\pi rh = 2\pi \cdot 2,5 \cdot 3 = 15\pi$
 • Área bases = $2 \cdot (\pi r^2) = 2 \cdot \pi \cdot 2,5^2 = 12,5\pi$
 • Área total = $15\pi + 12,5\pi = 27,5\pi \approx 86,35 \text{ cm}^2$

- (B) • Área lateral = $\pi rg = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$
 • Área base = $\pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$
 • Área total = $15\pi + 9\pi = 24\pi \approx 75,36 \text{ cm}^2$

- (C) • Área de la base:
 $3^2 = a^2 + 1,5^2 \rightarrow 9 = a^2 + 2,25 \rightarrow a^2 = 9 - 2,25 = 6,75$

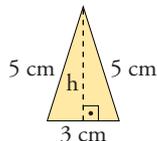


$$a = \sqrt{6,75} \approx 2,6 \text{ cm}$$

$$\text{Área base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{18 \cdot 2,6}{2} = 23,4 \text{ cm}^2$$

- Área de una cara lateral:

$$5^2 = h^2 + 1,5^2 \rightarrow 25 = h^2 + 2,25 \rightarrow h^2 = 25 - 2,25 = 22,75$$



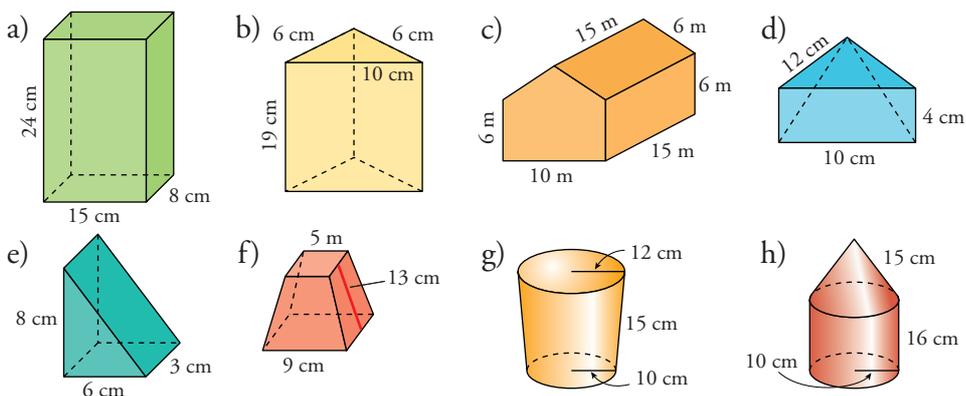
$$h = \sqrt{22,75} \approx 4,8 \text{ cm}$$

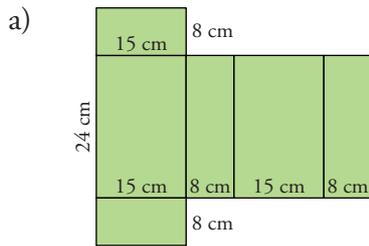
$$\text{Área} = \frac{3 \cdot 4,8}{2} = 7,2 \text{ cm}^2$$

- Área lateral = $6 \cdot 7,2 = 43,2 \text{ cm}^2$
 • Área total = $23,4 + 43,2 = 66,6 \text{ cm}^2$

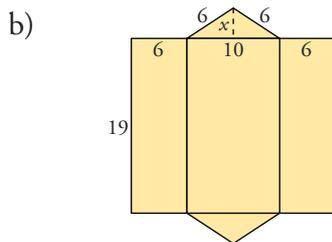
- (D) • Área = $4\pi R^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \approx 113,04 \text{ cm}^2$

3 Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total de los siguientes cuerpos geométricos.



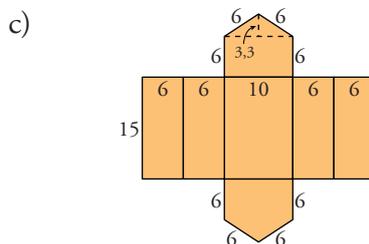


- Área lateral = (Perímetro base) · altura =
= $46 \cdot 24 = 1\,104 \text{ cm}^2$
- Área base = $15 \cdot 8 = 120 \text{ cm}^2$
- Área total = $1\,104 + 2 \cdot 120 = 1\,344 \text{ cm}^2$

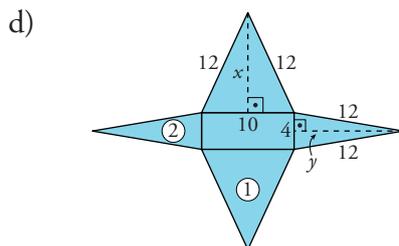


- Hallamos la altura de la base:
 $6^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 36 = x^2 + 25 \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 = 36 - 25 = 11$
 $x = \sqrt{11} \approx 3,3 \text{ cm}$

- Área base = $\frac{10 \cdot 3,3}{2} = 16,5 \text{ cm}^2$
- Área lateral = (Perímetro base) · altura = $22 \cdot 19 = 418 \text{ cm}^2$
- Área total = $418 + 2 \cdot 16,5 = 451 \text{ cm}^2$



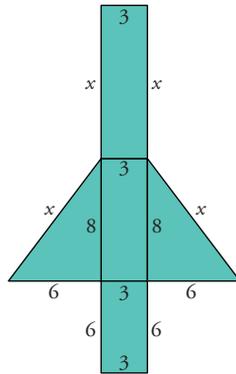
- Área base = $10 \cdot 6 + \frac{10 \cdot 3,3}{2} =$
= $60 + 16,5 = 76,5 \text{ m}^2$
- Área lateral = $34 \cdot 15 = 510 \text{ m}^2$
- Área total = $510 + 2 \cdot 76,5 = 663 \text{ m}^2$



- Hallamos x e y (alturas de las caras laterales):
 $12^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 144 = x^2 + 25$
 $x^2 = 119 \rightarrow x \approx 10,9 \text{ cm}$
 $12^2 = y^2 + 2^2 \rightarrow y^2 = 140 \rightarrow$
 $\rightarrow y \approx 11,8 \text{ cm}$

- Área de las caras laterales:
 $A_{\textcircled{1}} = \frac{10 \cdot 10,9}{2} = 54,5 \text{ cm}^2$; $A_{\textcircled{2}} = \frac{4 \cdot 11,8}{2} = 23,6 \text{ cm}^2$
- Área de la base = $10 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$
- Área total = $40 + 2 \cdot 54,5 + 2 \cdot 23,6 = 196,2 \text{ cm}^2$

e)



- Hallamos el valor de x :

$$x^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \rightarrow$$

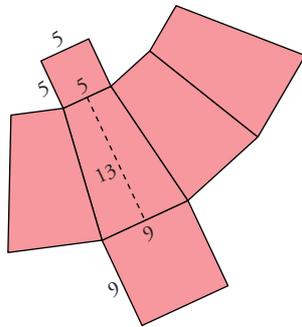
$$\rightarrow x = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

- Área lateral = (Perímetro base) · altura =
= $24 \cdot 3 = 72 \text{ cm}^2$

- Área base = $\frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

- Área total = $72 + 2 \cdot 24 = 120 \text{ cm}^2$

f)



- Área de una cara lateral = $\frac{(9 + 5) \cdot 13}{2} = 91 \text{ cm}^2$

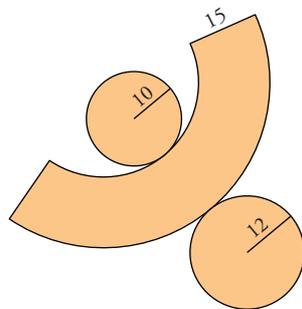
- Área lateral = $4 \cdot 91 = 364 \text{ cm}^2$

- Área base mayor = $9^2 = 81 \text{ cm}^2$

- Área base menor = $5^2 = 25 \text{ cm}^2$

- Área total = $364 + 81 + 25 = 470 \text{ cm}^2$

g)



- Área lateral = $\pi(r + r') \cdot g =$

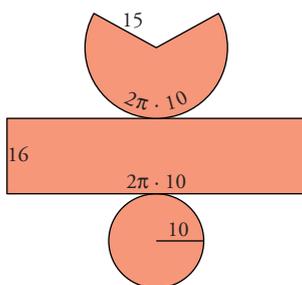
$$= \pi(12 + 10) \cdot 15 = 330\pi$$

- Área base menor = $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$

- Área base mayor = $\pi \cdot 12^2 = 144\pi$

- Área total = $330\pi + 100\pi + 144\pi =$
 $= 574\pi \approx 1802,36 \text{ cm}^2$

h)



- Área lateral = $(2\pi \cdot 10) \cdot 16 = 320\pi$

- Área lateral cono = $\pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 15 = 150\pi$

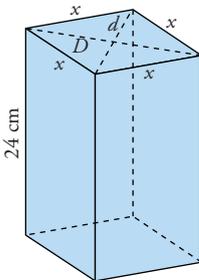
- Área círculo = $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$

- Área total = $320\pi + 150\pi + 100\pi =$
 $= 570\pi \approx 1789,8 \text{ cm}^2$

4 Dibuja los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área.

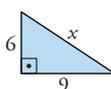
- Prisma de altura 24 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 y 12 cm.
- Octaedro regular de arista 18 cm.
- Pirámide hexagonal regular de arista lateral 28 cm y arista básica 16 cm.
- Pirámide de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.
- Cilindro de altura 17 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm.
- Tronco de cono generado al girar un trapecio rectángulo de bases 10 cm y 12 cm y altura 5 cm alrededor de esta.
- Casquete esférico de altura 7 cm de una esfera de radio 12 cm.
- Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.

a)



$d = 12 \text{ cm}$
 $D = 18 \text{ cm}$

- Hallamos el lado del rombo:

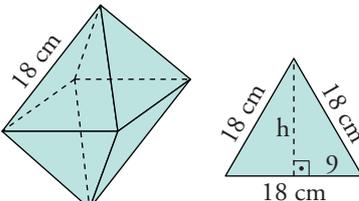


$$x^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$$

$$x = \sqrt{117} \approx 10,82 \text{ cm}$$

- Área lateral = $4 \cdot (24 \cdot 10,82) = 1\,038,72 \text{ cm}^2$
- Área base = $\frac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$
- Área total = $1\,038,72 + 2 \cdot 108 = 1\,254,72 \text{ cm}^2$

b)



- Área de una cara:

$$18^2 = h^2 + 9^2 \rightarrow 324 = h^2 + 81$$

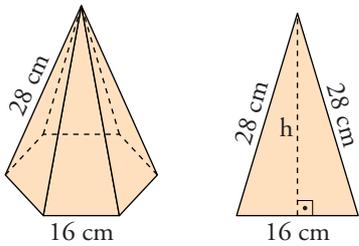
$$h^2 = 324 - 81 = 243 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \sqrt{243} \approx 15,6 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{18 \cdot 15,6}{2} = 140,4 \text{ cm}^2$$

- Área total = $8 \cdot 140,4 = 1\,123,2 \text{ cm}^2$

c)



- Área de una cara lateral:

$$28^2 = h^2 + 8^2 \rightarrow 784 = h^2 + 64$$

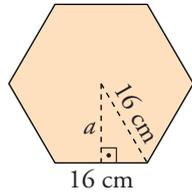
$$h^2 = 784 - 64 = 720 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \sqrt{720} \approx 26,83 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 26,83}{2} = 214,64 \text{ cm}^2$$

- Área lateral = $6 \cdot 214,64 = 1\,287,84 \text{ cm}^2$

- Área de la base:



$$16^2 = a^2 + 8^2 \rightarrow 256 = a^2 + 64 \rightarrow$$

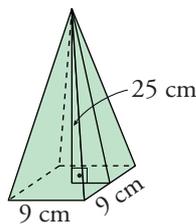
$$\rightarrow a^2 = 256 - 64 = 192$$

$$a = \sqrt{192} \approx 13,86 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(16 \cdot 6) \cdot 13,86}{2} = 665,28 \text{ cm}^2$$

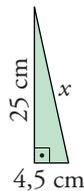
- Área total = $1\,287,84 + 665,28 = 1\,953,12 \text{ cm}^2$

d)



- Área de la base = $9^2 = 81 \text{ cm}^2$

- Área de una cara lateral:



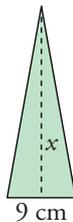
$$x^2 = 25^2 + 4,5^2 = 625 + 20,25 = 645,25$$

$$x = \sqrt{645,25} \approx 25,40 \text{ cm}$$

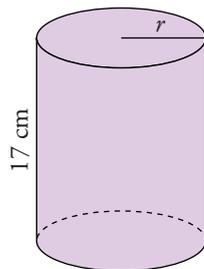
$$\text{Área} = \frac{9 \cdot 25,40}{2} = 114,30 \text{ cm}^2$$

- Área lateral = $4 \cdot 114,30 = 457,20 \text{ cm}^2$

- Área total = $81 + 457,20 = 538,20 \text{ cm}^2$



e)



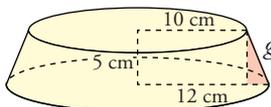
$$2\pi r = 44 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{44}{2\pi} = \frac{22}{\pi} \text{ cm}$$

- Área base = $\pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{22}{\pi}\right)^2 = \frac{484}{\pi} \approx 154,14 \text{ cm}^2$

- Área lateral = $(2\pi r) \cdot h = 44 \cdot 17 = 748 \text{ cm}^2$

- Área total = $748 + 2 \cdot 154,14 = 1\,056,28 \text{ cm}^2$

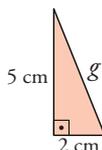
f)



- Área base menor = $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \approx 314 \text{ cm}^2$

- Área base mayor = $\pi \cdot 12^2 = 144\pi \approx 452,16 \text{ cm}^2$

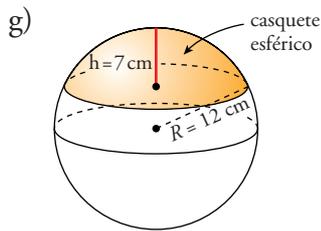
- Área lateral = $\pi(r + r') \cdot g$



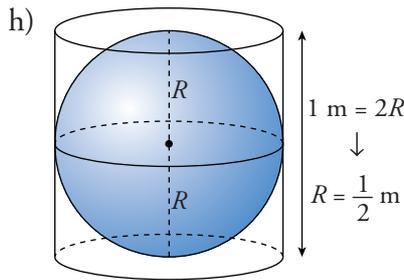
$$g^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \rightarrow g = \sqrt{29} \approx 5,39 \text{ cm}$$

$$\text{Área lateral} = \pi(10 + 12) \cdot 5,39 \approx 372,34 \text{ cm}^2$$

- Área total = $372,34 + 314 + 452,16 = 1\,138,50 \text{ cm}^2$



$$\text{Área} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 12 \cdot 7 = 168\pi \approx 527,52 \text{ cm}^2$$



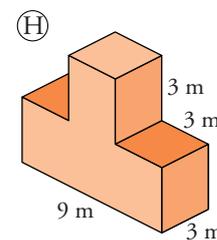
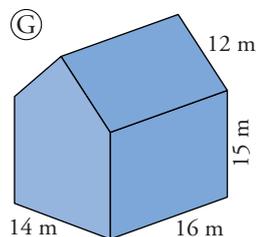
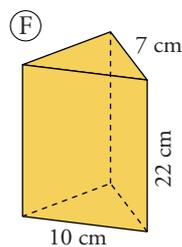
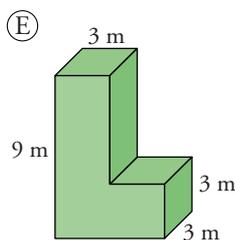
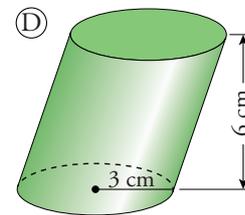
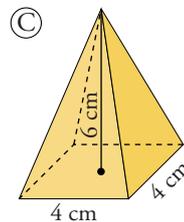
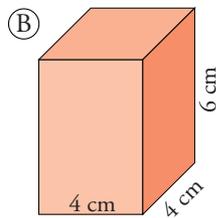
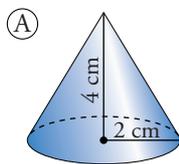
$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \\ &= \pi \approx 3,14 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Página 186

Volúmenes

5 ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO

6 Calcula el volumen de estos cuerpos:



$$(A) V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3} \approx 16,75 \text{ cm}^3$$

$$(B) V = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^3$$

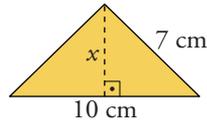
$$(C) V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h = \frac{1}{3}4^2 \cdot 6 = 32 \text{ cm}^3$$

$$(D) V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi \approx 169,56 \text{ cm}^3$$

Ⓔ La figura se puede descomponer en cuatro cubos de arista 3 cm.

Por tanto: $V = 4 \cdot 3^3 = 108 \text{ cm}^3$

Ⓕ Área de la base:



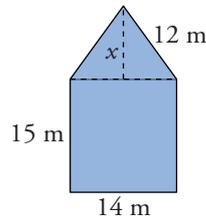
$$7^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow 49 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 49 - 25 = 24$$

$$x = \sqrt{24} \approx 4,90 \text{ cm}$$

$$\text{Área base} = \frac{10 \cdot 4,90}{2} \approx 24,50 \text{ cm}^2$$

$$V = (\text{Área de la base}) \cdot h = 24,50 \cdot 22 = 539 \text{ cm}^3$$

Ⓖ Área de la base:



$$12^2 = x^2 + 7^2 \rightarrow x^2 = 144 - 49 = 95$$

$$x = \sqrt{95} \approx 9,7 \text{ m}$$

$$\text{Área de la base} = 15 \cdot 14 + \frac{14 \cdot 9,7}{2} \approx 277,9 \text{ m}^2$$

$$V = (\text{Área de la base}) \cdot h = 277,9 \cdot 16 = 4446,4 \text{ m}^3$$

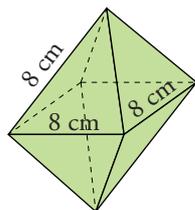
Ⓗ Podemos descomponer la figura en cuatro cubos de arista 3 cm.

Tiene el mismo volumen que la figura Ⓔ: $V = 108 \text{ cm}^3$

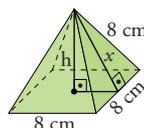
7 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

- Octaedro regular de arista 8 cm.
- Pirámide hexagonal regular cuya arista lateral mide 17 cm y la arista de la base 10 cm.
- Tronco de cono de radios 12 cm y 16 cm y altura 20 cm.
- Semiesfera de radio 15 cm.
- Cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 10 cm y altura 18 cm.

a)



- Podemos descomponerlo en dos pirámides cuadrangulares regulares de arista 8 cm:



$$8^2 = x^2 + 4^2 \rightarrow 64 = x^2 + 16 \rightarrow$$

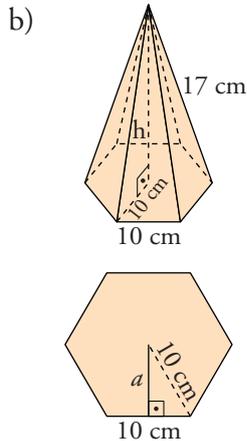
$$\rightarrow x^2 = 64 - 16 = 48$$

$$x^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow 48 = h^2 + 16 \rightarrow h^2 = 48 - 16 = 32 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen} = V_1 = \frac{1}{3} (\text{Área de la base}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 5,66 \approx 120,75 \text{ cm}^3$$

- Volumen total = $2V_1 = 2 \cdot 120,75 = 241,5 \text{ cm}^3$



- Hallamos la altura de la pirámide, h:

$$17^2 = h^2 + 10^2 \rightarrow 289 = h^2 + 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow h^2 = 289 - 100 = 189$$

$$h = \sqrt{189} \approx 13,75 \text{ cm}$$

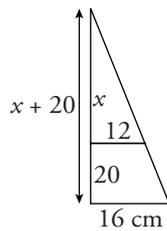
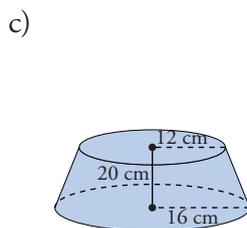
- Calculamos el área de la base:

$$10^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow 100 = a^2 + 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

$$\text{Área de la base} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{60 \cdot 8,66}{2} \approx 259,8 \text{ cm}^2$$

- Volumen = $\frac{1}{3} (\text{Área de la base}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 259,8 \cdot 13,75 \approx 1190,75 \text{ cm}^3$



$$\frac{x + 20}{16} = \frac{x}{12} \rightarrow 12(x + 20) = 16x \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x + 240 = 16x \rightarrow$$

$$\rightarrow 240 = 16x - 12x \rightarrow 240 = 4x \rightarrow$$

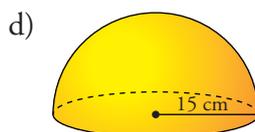
$$\rightarrow x = \frac{240}{4} = 60 \text{ cm}$$

La altura del cono grande es 80 cm y la del cono pequeño es 60 cm.

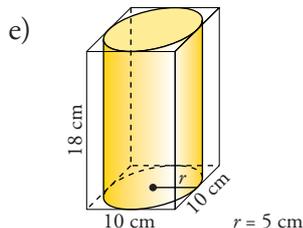
$$V_{\text{cono grande}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 16^2 \cdot 80 = \frac{20480\pi}{3}$$

$$V_{\text{cono pequeño}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 60 = 2880\pi$$

- Volumen tronco cono $\rightarrow V = \frac{20480\pi}{3} - 2880\pi \approx 12392,53 \text{ cm}^3$



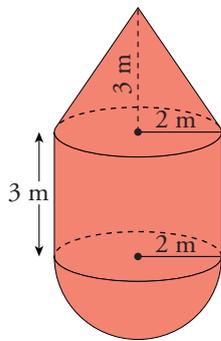
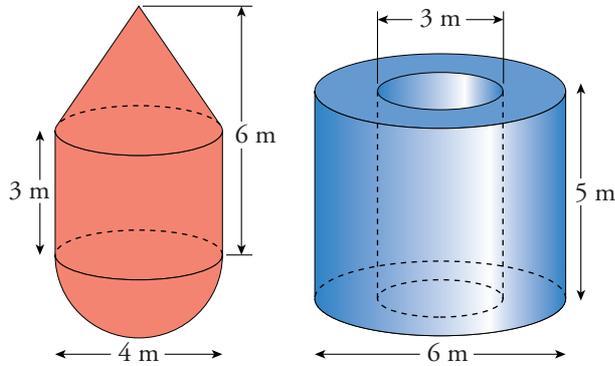
$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{6} \pi \cdot 15^3 = 2250\pi \approx 7065 \text{ cm}^3$$



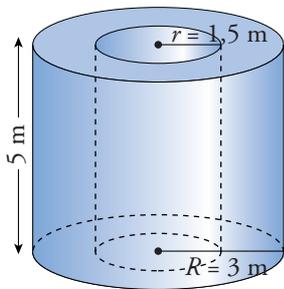
$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 450\pi \approx 1413 \text{ cm}^3$$

8 ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO

9 Calcula el volumen de estos cuerpos:

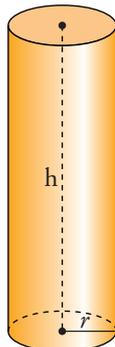


- Volumen cono = $V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 4\pi \text{ m}^3$
- Volumen cilindro = $V_2 = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi \text{ m}^3$
- Volumen semiesfera = $V_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 \right) = \frac{16\pi}{3} \text{ m}^3$
- Volumen total = $V_1 + V_2 + V_3 = 4\pi + 12\pi + \frac{16\pi}{3} = \frac{64\pi}{3} \approx 66,99 \text{ m}^3$



- Volumen cilindro exterior = $V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ m}^3$
- Volumen cilindro interior = $V_2 = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 5 = 11,25\pi \text{ m}^3$
- Volumen total = $V_1 - V_2 = 45\pi - 11,25\pi = 33,75\pi \approx 105,98 \text{ m}^3$

10 ¿Cuál debe ser la altura de un cilindro cuya base mide 24 cm para que su volumen sea 1 l?



$$2\pi r = 24 \text{ cm} \rightarrow r = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{\pi} \approx 3,82 \text{ cm}$$

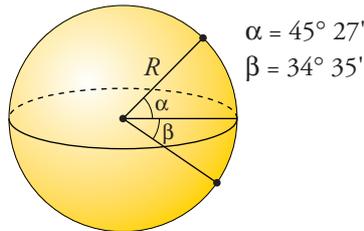
$$\left. \begin{array}{l} V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3,82^2 \cdot h \approx 45,82 h \\ V = 1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 45,82 h = 1000 \rightarrow h = \frac{1000}{45,82} \approx 21,82 \text{ cm}$$

Página 187

Coordenadas geográficas

- 11 Dos ciudades tienen la misma longitud 3° O, y sus latitudes son $45^\circ 27'$ N y $34^\circ 35'$ S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?



Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de:

$$\alpha + \beta = 45^\circ 27' + 34^\circ 35' = 80^\circ 2'$$

$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 80^\circ 2'}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 6370 \cdot 80,03^\circ}{360^\circ} \approx 8\,893,02 \text{ km}$$

- 12 Cuando en el huso 0 son las 7 a. m., ¿qué hora es en el huso 3° al E? ¿Y en el huso 12° ?

- En el huso 3° E son tres horas menos; es decir, las 4 a.m.
- En el huso 12° son doce horas menos; es decir, las 7 p.m.

- 13 La “milla marina” es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitudes es $1'$. Calcula la longitud de una “milla marina”.

$$1' = \frac{1}{60} \text{ grados; radio de la Tierra: } R \approx 6\,370 \text{ km}$$

$$\text{Milla marina} \rightarrow \frac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21\,600} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1,85 \text{ km}$$

- 14 Roma está en el huso 1° E y Nueva York en el 5° O. Si un avión sale de Roma a las 9 a. m. y el vuelo dura 8 h, ¿cuál será la hora local de llegada a Nueva York?

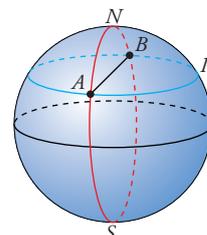
$5 + 1 = 6$ horas menos en Nueva York que en Roma.

$$9 \text{ a. m.} + 8 = 17 \text{ h} \rightarrow 5 \text{ p.m. hora de Roma}$$

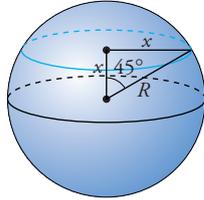
$$17 - 6 = 11 \text{ a.m. (es la hora local de llegada a Nueva York)}$$

Las 11 de la mañana.

- 15 Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45° . Puede hacerlo siguiendo el paralelo (APB) o siguiendo la ruta polar (ANB). ¿Cuál es la más corta?



- Hallamos el radio del paralelo 45° :



$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6370}{\sqrt{2}} \approx 4504,27 \text{ km}$$

Por tanto, la longitud del arco APB es:

$$L_{APB} = \frac{2\pi \cdot 4504,27}{2} \approx \pi \cdot 4504,27 \approx 14143,41 \text{ km}$$

- El radio de la Tierra es $R \approx 6370 \text{ km}$.

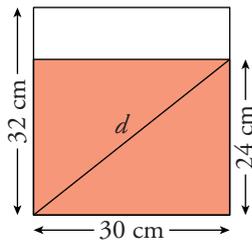
Para ir de A a B por la ruta ANB se abarca un ángulo de $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ sobre el meridiano. Por tanto, la longitud del arco ANB es:

$$L_{ANB} = \frac{2\pi R \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} \approx \frac{\pi \cdot 6370}{2} \approx 10000,9 \text{ km}$$

- La ruta más corta es la polar.

PIENSA Y RESUELVE

- 16** Un bidón de pintura de forma cilíndrica, de 32 cm de altura y 30 cm de diámetro de la base, está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que se habrá sumergido totalmente en la pintura?



$$\frac{3}{4} \text{ de } 32 = 24 \text{ cm}$$

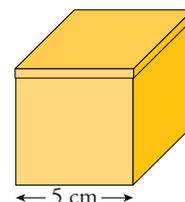
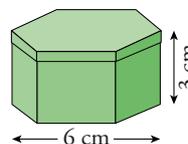
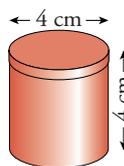
- El pincel se encontrará sobre la diagonal de una sección rectangular del cilindro.

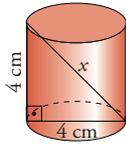
- Veamos cuánto mide la diagonal del rectángulo $30 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$:

$$d = \sqrt{24^2 + 30^2} = \sqrt{1476} \approx 38,42 \text{ cm} < 40 \text{ cm}$$

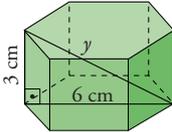
- El pincel, de 40 cm de largo, no quedará completamente sumergido en la pintura.

- 17** Calcula la longitud del mayor listón que cabe en cada una de estas cajas:

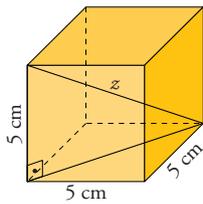




$$x^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ cm}$$



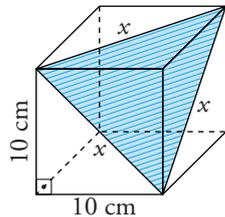
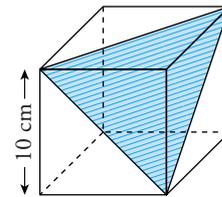
$$y^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45 \rightarrow x = \sqrt{45} \approx 6,71 \text{ cm}$$



$$z = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ cm}$$

18 Calcula la superficie del triángulo coloreado en la figura.

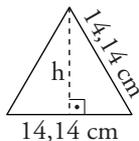
- Cada uno de los lados del triángulo es la diagonal de una de las caras del cubo. Por tanto, mide:



$$x^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{200} \approx 14,14 \text{ cm}$$

- La altura del triángulo es:



$$14,14^2 = h^2 + 7,07^2 \rightarrow 200 = h^2 + 50 \rightarrow h^2 = 150$$

$$h = \sqrt{150} \approx 12,25 \text{ cm}$$

- El área del triángulo es: $A = \frac{14,14 \cdot 12,25}{2} \approx 86,61 \text{ cm}^2$

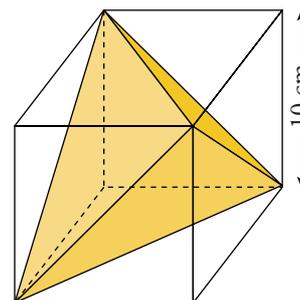
19 Calcula la superficie del mayor tetraedro que cabe dentro de un cubo de 10 cm de arista.

- Las caras son triángulos como los del ejercicio anterior; por tanto, el área de una cara es:

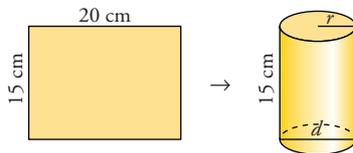
$$A_1 \approx 86,61 \text{ cm}^2$$

- Como son cuatro triángulos iguales, el área del tetraedro será:

$$A_T = 4 \cdot 86,61 = 346,44 \text{ cm}^2$$



- 20** Se ha construido un tubo cilíndrico soldando, por los lados más cortos, un rectángulo de chapa de 20 cm de largo por 15 cm de ancho. ¿Cuál es el diámetro del tubo? ¿Y su volumen?

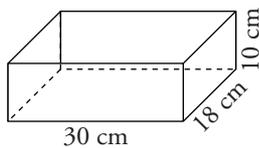


- El perímetro de la base del cilindro es de 20 cm:

$$2\pi r = 20 \rightarrow r = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} \approx 3,18 \text{ cm}$$

- Diámetro del tubo $\rightarrow d = 2r = 2 \cdot 3,18 = 6,36 \text{ cm}$
- Volumen $\rightarrow V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3,18^2 \cdot 15 \approx 476,29 \text{ cm}^3$

- 21** Un dependiente envuelve una caja de zapatos de 30 cm de larga, 18 cm de ancha y 10 cm de alta con un trozo de papel, de forma que un 15% del envoltorio queda solapado sobre sí mismo. ¿Qué cantidad de papel ha utilizado?



- La superficie de la caja es:

$$\text{Área total} = 2(30 \cdot 10 + 18 \cdot 10 + 30 \cdot 18) = 2040 \text{ cm}^2$$

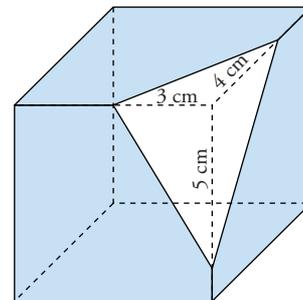
- Si ha solapado un 15% de todo el papel, entonces ha utilizado un 85% del papel para cubrir la caja, es decir:

$$85\% \text{ del total} = 2040 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Total} = 2040 : 0,85 = 2400 \text{ cm}^2$$

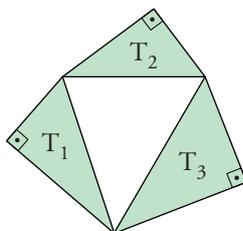
Ha utilizado $2040 \text{ cm}^2 = 0,24 \text{ m}^2$ de papel.

- 22** Observa que al seccionar un cubo como indica la figura, se obtiene de la esquina cortada una pirámide triangular.

- Dibuja el desarrollo de dicha pirámide.
- Calcula su superficie lateral considerando la sección como base.
- Calcula su volumen (apóyala sobre uno de los triángulos rectángulos).



- Desarrollo:



- Superficie lateral (tomando la sección como base):

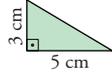
$$3 \text{ cm} \begin{array}{c} \triangle T_1 \\ \square \\ 5 \text{ cm} \end{array} \quad A_1 = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$$

$$3 \text{ cm} \begin{array}{c} \triangle T_2 \\ \square \\ 4 \text{ cm} \end{array} \quad A_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$4 \text{ cm} \begin{array}{c} \triangle T_3 \\ \square \\ 5 \text{ cm} \end{array} \quad A_3 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área lateral} = A_1 + A_2 + A_3 = 7,5 + 6 + 10 = 23,5 \text{ cm}^2$$

- Volumen $\rightarrow V = \frac{1}{3} (\text{Área base}) \cdot \text{altura}$

Si consideramos como base el triángulo , la altura de la pirámide es 4 cm. Por tanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 4 = 10 \text{ cm}^3$$

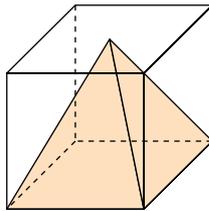
23 Al introducir una piedra en un recipiente cilíndrico, de 20 cm de diámetro, la altura del agua que contiene sube 5 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?

- El volumen de agua que ha subido es:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi \approx 1570 \text{ cm}^3$$

- Por tanto, el volumen de la piedra es de 1570 cm^3 , aproximadamente.

24 Calcula el volumen de la mayor pirámide que cabe dentro de un ortoedro de 3 m de ancho, 4 m de largo y 5 m de alto.



Será una pirámide en la que la base y la altura coinciden con las del ortoedro. Por tanto, su volumen será:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5) = 20 \text{ m}^3$$

25 Un estanque tiene como base una elipse de 12 m^2 de superficie y una profundidad de 1,5 m. ¿Cuánto tardará en llenarse mediante una fuente que aporta 3 litros de agua por segundo?

- Calculamos el volumen del estanque:

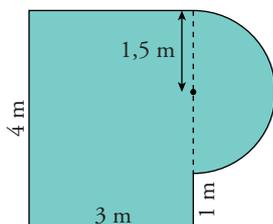
$$V = (\text{Área de la base}) \cdot h = 12 \cdot 1,5 = 18 \text{ m}^3 = 18000 \text{ dm}^3 = 18000 \text{ l}$$

- Como la fuente aporta 3 l/s, tardará:

$$\frac{18000}{3} = 6000 \text{ segundos} = 100 \text{ minutos} = 1 \text{ h } 40 \text{ min en llenarse.}$$

Página 188

26 Calcula el volumen de una habitación de 2,30 m de altura, cuya planta tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura.

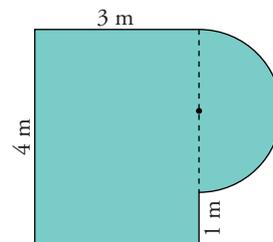


- Hallamos el área de la base:

$$\text{Área rectángulo} = A_1 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$$

$$\text{Área semicírculo} = A_2 = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{2} \approx 3,53 \text{ m}^2$$

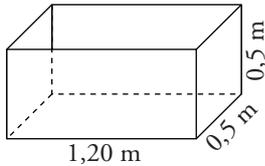
$$\text{Área base} = A_1 + A_2 = 12 + 3,53 = 15,53 \text{ m}^2$$



- Por tanto, el volumen es:

$$V = (\text{Área de la base}) \cdot \text{altura} = 15,53 \cdot 2,30 \approx 35,72 \text{ m}^3$$

- 27** ¿Cuál es el peso de un contenedor de embalaje de $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 1,20 \text{ m}$, sabiendo que se ha construido con planchas de aglomerado que pesan a razón de 12 kg/m^2 ?



- Hallamos la superficie del contenedor:

$$S = 2 \cdot (0,5^2) + 4 \cdot (1,20 \cdot 0,5) = 2,9 \text{ m}^2$$

- Por tanto, el contenedor pesa:

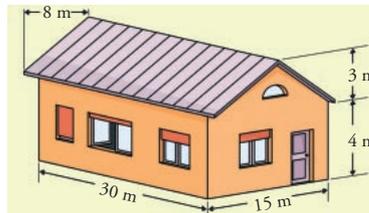
$$12 \cdot 2,9 = 34,8 \text{ kg}$$

- 28** Un bidón cilíndrico de 30 cm de diámetro pesa, vacío, 5 kg , y lleno de agua, $27,608 \text{ kg}$. ¿Cuál es la altura del bidón?

- Peso del agua = $27,608 - 5 = 22,608 \text{ kg}$
- Hay $22,608$ litros de agua = $22,608 \text{ dm}^3 = 22\,608 \text{ cm}^3$ de agua.
- Volumen del agua:

$$V = 22\,608 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{22\,608}{\pi \cdot 15^2} = 32 \text{ cm de altura tiene el bidón.}$$

- 29** Observa la figura y calcula:



- a) El coste de la construcción del tejado, sabiendo que ha salido a 85 € el metro cuadrado.
- b) El número de radiadores que se deben instalar en su interior, sabiendo que se necesita un radiador por cada 15 m^3 .

a) $d^2 = 3^2 + 8^2 = 9 + 64 = 73 \rightarrow d = \sqrt{73} \approx 8,54 \text{ m}$

- La superficie del tejado es:

$$A_T = (30 \cdot 8,54) \cdot 2 = 512,4 \text{ m}^2$$

- Coste = $512,4 \cdot 85 = 43\,554 \text{ €}$

- b) • Calculamos el volumen de la construcción:

$$V_T = 15 \cdot 30 \cdot 4 + \frac{15 \cdot 3}{2} \cdot 30 = 1\,800 + 675 = 2\,475 \text{ m}^3$$

- Número de radiadores = $\frac{2\,475}{15} = 165$ radiadores

30 Una empresa de carburantes tiene cuatro tanques esféricos de 20 m de diámetro y seis tanques cilíndricos de 20 m de altura y 10 m de radio en la base. Para evitar la corrosión, se contrata a un equipo de operarios que cobra, por pintar los depósitos, 12 €/m². Calcula el coste total de la operación.

- Superficie esférica = $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ m}^2$
- Superficie cilíndrica = $2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 400\pi \text{ m}^2$
- Bases del cilindro = $2 \cdot (\pi r^2) = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 200\pi \text{ m}^2$
- Como hay 4 tanques esféricos y 6 cilíndricos, el área total es:

$$A_T = 4 \cdot 400\pi + 6 \cdot (400\pi + 200\pi) = 5200\pi \approx 16328 \text{ m}^2$$

- El coste total es:

$$12 \cdot 16328 = 195936 \text{ €}$$

31 Se introduce una bola de piedra de 12 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 12 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:

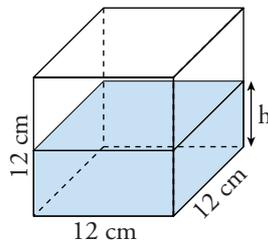
- La cantidad de agua que se ha derramado.
- La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a) Volumen de la bola $\rightarrow V_b = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \approx 904,32 \text{ cm}^3$

El volumen que se ha derramado es el volumen de la bola; es decir, 904,32 cm³.

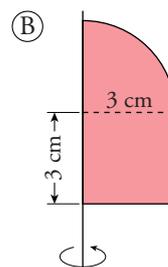
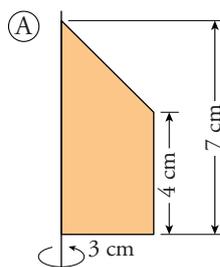
- b)
- Volumen del recipiente = $V_r = 12^3 = 1728 \text{ cm}^3$
 - Volumen de agua que queda después de sacar la bola:

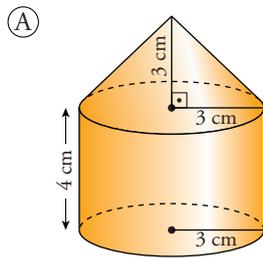
$$V = V_r - V_b = 1728 - 904,32 = 823,68 \text{ cm}^3$$



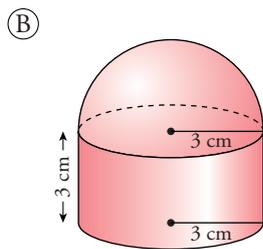
$$V = 823,68 = 12^2 \cdot h \rightarrow h = \frac{823,68}{144} = 5,72 \text{ cm es la altura que alcanza el agua después de sacar la bola.}$$

32 Calcula el volumen de los cuerpos de revolución que genera cada una de estas figuras planas al girar alrededor del eje indicado:



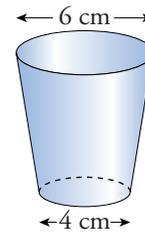
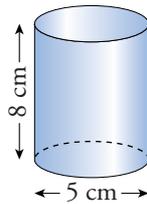


- Volumen del cilindro = $V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi \text{ cm}^3$
- Volumen del cono = $V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi \text{ cm}^3$
- Volumen total = $V_1 + V_2 = 36\pi + 9\pi = 45\pi \approx 141,3 \text{ cm}^3$



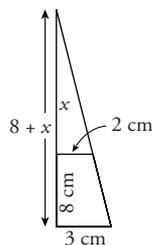
- Volumen del cilindro = $V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi \text{ cm}^3$
- Volumen de la semiesfera = $V_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 \right) = 18\pi \text{ cm}^3$
- Volumen total = $V_1 + V_2 = 27\pi + 18\pi = 45\pi \approx 141,3 \text{ cm}^3$

33 a) ¿Qué vaso tiene mayor capacidad?



b) ¿Cuántos litros son 10 de estos vasos?

- a) • Volumen del cilindro = $\pi \cdot 2,5^2 \cdot 8 = 50\pi \approx 157 \text{ cm}^3$
- Volumen del tronco de cono:



$$\frac{8+x}{3} = \frac{x}{2} \rightarrow 2(8+x) = 3x \rightarrow 16+2x = 3x \rightarrow 16 = x$$

$$\text{Volumen cono grande} = V_G = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 24 = 72\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen cono pequeño} = V_P = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 16 = \frac{64\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen tronco de cono} = V_T = V_G - V_P = 72\pi - \frac{64\pi}{3} \approx 159,09 \text{ cm}^3$$

El tronco de cono tiene mayor capacidad que el cilindro.

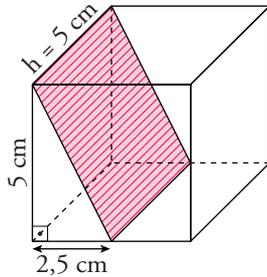
b) • ¿Cuántos litros son 10 de estos vasos?

— Vaso cilíndrico $\rightarrow 157 \text{ cm}^3 \cdot 10 = 1570 \text{ cm}^3 = 1,57 \text{ dm}^3 = 1,57 \text{ l}$

— Vaso tronco de cono $\rightarrow 159,09 \text{ cm}^3 \cdot 10 = 1590,9 \text{ cm}^3 = 1,5909 \text{ dm}^3 = 1,5909 \text{ l}$

34 Seccionamos un cubo como indica la figura.

¿Cuál es el volumen de las partes seccionadas?

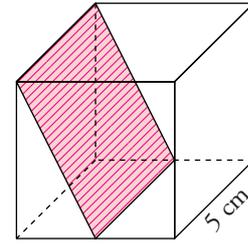


- Tomamos como base el triángulo rectángulo:

$$\text{Área base} = \frac{5 \cdot 2,5}{2} = 6,25 \text{ cm}^2$$

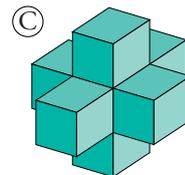
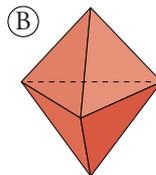
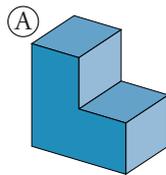
- El volumen de la parte seccionada será:

$$V = (\text{Área base}) \cdot h = 6,25 \cdot 5 = 31,25 \text{ cm}^3$$



REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

35 Explica por qué cada uno de los siguientes poliedros no es regular. Comprueba si se verifica el teorema de Euler en cada uno.



(A) No todas las caras son iguales. Hay cuadrados, rectángulos y polígonos de la forma .

(B) En unos vértices concurren tres caras y en otros, cuatro.

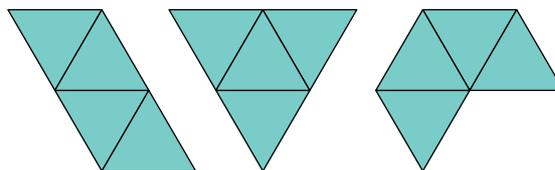
(C) En unos vértices concurren tres caras y en otros, seis.

- Veamos si se verifica el teorema de Euler en cada caso:

| | CARAS | VÉRTICES | ARISTAS | $C + V - A$ |
|---|-------|----------|---------|-------------|
| A | 8 | 12 | 18 | 2 |
| B | 6 | 5 | 9 | 2 |
| C | 30 | 32 | 60 | 2 |

Sí se verifica el teorema de Euler en los tres casos.

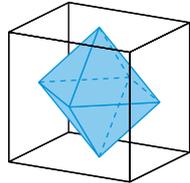
36 ¿Cuáles de estos desarrollos corresponden a un tetraedro regular?



El primero y el segundo.

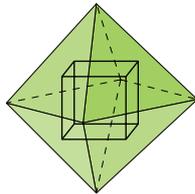
Página 189

37 ¿Qué poliedro regular tiene por vértices los centros de las caras de un cubo?



El octaedro (son poliedros duales).

38 ¿Qué poliedro obtienes si tomas como vértices los centros de las caras de un octaedro regular?



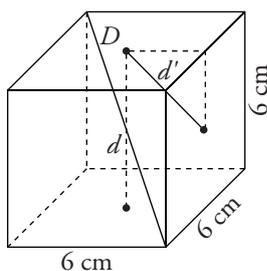
El cubo (son poliedros duales).

39 ¿Por cuánto se multiplica la superficie de un cubo al aumentar al doble su arista? Y su volumen, ¿por cuánto se multiplica?

- La superficie de un cubo de arista a es: $S_1 = 6a^2$
- Si tomamos una arista doble, $2a$, entonces la superficie sería:
 $S_2 = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 4 \cdot (6a^2) = 4 \cdot S_1 \rightarrow$ La superficie se multiplica por 4.
- El volumen de un cubo de arista a es: $V_1 = a^3$
- Si tomamos una arista doble, $2a$, entonces el volumen sería:
 $V_2 = (2a)^3 = 8a^3 = 8V_1 \rightarrow$ El volumen se multiplica por 8.

40 La arista de un cubo mide 6 cm.

- ¿Cuál es la distancia entre los centros de dos caras opuestas?
- ¿Cuál es la distancia entre los centros de dos caras contiguas?
- ¿Cuál es la distancia máxima entre dos vértices?



a) $d = 6$ cm

b) $(d'')^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$
 $d'' = \sqrt{18} \approx 4,24$ cm

c) La diagonal del cubo:

$$D = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,39 \text{ cm}$$

PARA PROFUNDIZAR

41 ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO

42 Deseamos pintar con oro una cúpula de 5 m de altura y 8 m de radio de la base. Calcula cuánto cuesta a razón de 360 €/m².

- Radio de la esfera correspondiente al casquete esférico:

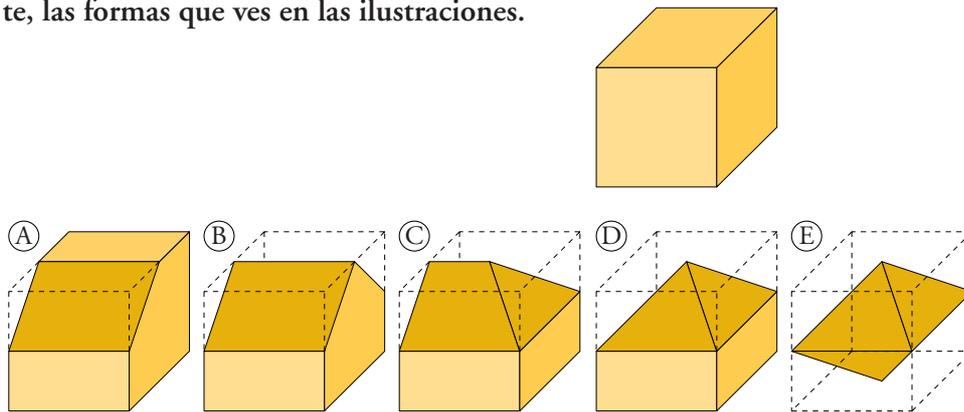
$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h} = \frac{8^2 + 5^2}{2 \cdot 5} = \frac{64 + 25}{10} = 8,9 \text{ m}$$

- Superficie del casquete esférico:

$$A = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 8,9 \cdot 5 = 89\pi \approx 279,46 \text{ m}^2$$

- Coste = 360 · 279,46 = 100 605,6 €

43 Un carpintero ha ido cortando un cubo de madera obteniendo, sucesivamente, las formas que ves en las ilustraciones.



Si el cubo original pesaba 24 kg, ¿cuál es el peso de cada una de las figuras obtenidas en los pasos intermedios?

a) Se ha eliminado $\frac{1}{8}$ del cubo \rightarrow Peso = $\frac{7}{8} \cdot 24 = 21$ kg

b) Se han eliminado $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ del cubo inicial \rightarrow Peso = $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ kg

c) En b) tenemos $\frac{6}{8}$ del cuerpo. La parte de arriba son $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

En c) se elimina $\frac{1}{6}$ de la parte de arriba, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ del total.

Hemos eliminado 1 kg \rightarrow Peso = 18 - 1 = 17 kg

d) Se elimina de nuevo 1 kg \rightarrow Peso = 17 - 1 = 16 kg

e) Hasta d) hemos eliminado 8 kg. Ahora eliminamos 8 kg más. Quedan, por tanto, 8 kg.

44 Investiga. Cortes en el cubo.

Para este ejercicio conviene que construyas un cubo de cartulina o que modes unos cuantos de plastilina y ensayes con ellos distintos cortes con una cuchilla.

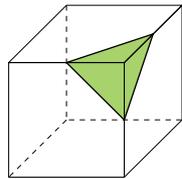
a) ¿Cómo cortar un cubo para conseguir un triángulo equilátero? ¿Y para conseguir el mayor de todos ellos?

b) ¿Cómo cortar un cubo para conseguir los siguientes cuadriláteros?

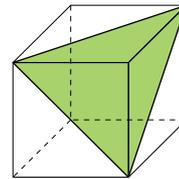
- Un cuadrado.
- Un rectángulo.
- El mayor rectángulo.
- Un paralelogramo no rectángulo.
- Un rombo.
- Un trapecio.

c) ¿Puede conseguirse un pentágono cortando un cubo? ¿Y un hexágono? ¿Y un hexágono regular?

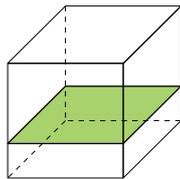
a)



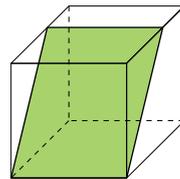
TRIÁNGULO EQUILÁTERO

EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO
MÁS GRANDE POSIBLE

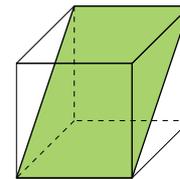
b)



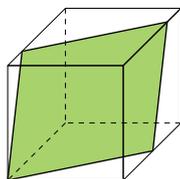
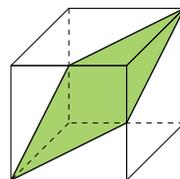
UN CUADRADO



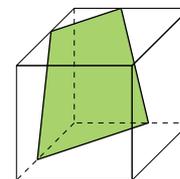
UN RECTÁNGULO



EL MAYOR RECTÁNGULO

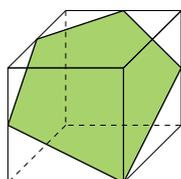
UN PARALELOGRAMO
NO RECTÁNGULO

UN ROMBO

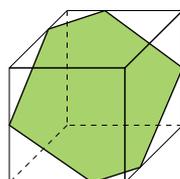


UN TRAPECIO

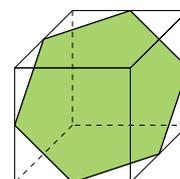
c)



UN PENTÁGONO



UN HEXÁGONO



UN HEXÁGONO REGULAR