Página 30

PRACTICA

Números enteros y racionales

1 **Calcula:**

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)]$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1)$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)]$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)]$

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)] = 5 - 3 + 2 + 4 - 6 - 3 + 6 - 4 =$

$= (5 + 2 + 4 + 6) - (3 + 6 + 3 + 4) =$

$= 17 - 16 = 1$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1) = (-2) \cdot (-7) \cdot (-1) = -14$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)] = 5 \cdot (8 - 5) - (-4) \cdot (6 - 9) =$

$= 5 \cdot 3 - (-4) \cdot (-3) = 15 - 12 = 3$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)] = (-7) \cdot [4 \cdot (-5) - 5 \cdot 3] =$

$= (-7) \cdot (-20 - 15) = (-7) \cdot (-35) = 245$

2 **Calcula mentalmente:**

a) **La mitad de** $\frac{7}{8}$

b) **La tercera parte de** $\frac{9}{5}$

c) **La mitad de la quinta parte de** -4

d) **El triple de la mitad de** $\frac{2}{3}$

a) $\frac{7}{16}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 1

3 **Calcula mentalmente:**

a) **Los dos quintos de 400**

b) **El número cuyos dos quintos son 160**

c) **Los tres séptimos de 140**

d) **El número cuyos cinco sextos son 25**

a) $\frac{2}{5}$ de $400 = 2 \cdot 80 = 160$

b) $\frac{2}{5}$ de $\boxed{} = 160 \quad \rightarrow$ por a) se sabe que el número es 400

c) $\frac{3}{7}$ de 140 = 3 · 20 = 60

d) $\frac{5}{6}$ de $\boxed{}$ = 25 → el número es 30

4 **Calcula mentalmente:**

a) $\frac{4}{3}$ **de 21** **b)** $\frac{5}{2}$ **de 10** **c)** $\frac{3}{10}$ **de 1 millón** **d)** $\frac{7}{20}$ **de cien mil**

a) $\frac{4}{3}$ de 21 = 4 · 7 = 28

b) $\frac{5}{2}$ de 10 = 5 · 5 = 25

c) $\frac{3}{10}$ de 1 millón = 3 · 100 000 = 300 000

d) $\frac{7}{20}$ de cien mil = 7 · 5 000 = 35 000

5 **Expresa en forma de fracción de hora:**

a) 15 minutos **b) 20 minutos** **c) 10 minutos**

d) 1 minuto **e) 120 segundos** **f) 1 segundo**

a) $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{60}$

e) 120'' = 2' → $\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ f) 1 h = 3 600'' → $\frac{1}{3\,600}$

6 **En un puesto de frutas y verduras, los 5/6 del importe de las ventas de un día corresponden al apartado frutas. Del dinero recaudado en la venta de fruta, los 3/8 corresponden a las naranjas. Si la venta de naranjas asciende a 89 €, ¿qué caja ha hecho el establecimiento?**

Del dinero total recaudado, la fracción que corresponde a la venta de naranjas es:

$$\frac{3}{8} \text{ de } \frac{5}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$$

Por lo tanto, $\frac{5}{16}$ equivale a 89 € → $\frac{1}{16}$ equivale a 17,8 € (resultado de dividir 89 entre 5) → el total de dinero recaudado será 17,8 · 16 = 284,8 €.

7 **En un depósito, el lunes había 3 000 litros de agua y estaba lleno. El martes se gastó 1/6 del depósito. El miércoles se sacaron 1 250 litros. ¿Qué fracción queda?**

Lunes $\rightarrow$ depósito lleno = 3 000 *l*

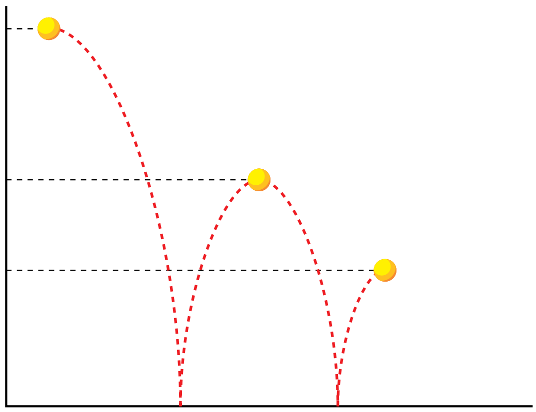
Martes $\rightarrow$ se gastó $\frac{1}{6}$ del depósito = $\frac{1}{6}$ de 3 000 = 500 *l*

Miércoles $\rightarrow$ se sacaron 1 250 *l*

Litros que quedan $\rightarrow$ 3 000 – 1 250 – 500 = 1 250 *l*

La fracción que representa el número de litros que queda es $\frac{1\,250}{3\,000} = \frac{5}{12}$

8 **Una pelota pierde en cada bote $\frac{2}{5}$ de la altura a la que llegó en el bote anterior. ¿Qué fracción de la altura inicial, desde la que cayó, alcanzará cuatro botes después?**



En el primer bote alcanzará una altura de $\frac{3}{5}$ de la altura inicial; en el segundo bote la altura será $\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{5}$ de la altura inicial…

… luego en cuatro botes la altura alcanzada será $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$ de la altura inicial.

9 **Reduce a una sola fracción cada una de estas expresiones:**

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right)$

c) $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right]$

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} - \frac{4}{16} - \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) = \left(\frac{12}{20} - \frac{5}{20} + \frac{40}{20}\right) - \left(\frac{15}{20} - \frac{8}{20} + \frac{20}{20}\right) =$

$$= \frac{47}{20} - \frac{27}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

c) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$

$=1+\frac{2}{3}-\frac{4}{4}-\frac{1}{2}=1+\frac{2}{3}-1-\frac{1}{2}=$

$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=\left(\frac{9}{15}+\frac{5}{15}\right)-\left[1-\left(\frac{3-2}{4}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=$

$=\frac{14}{15}-\left(1-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right)=$

$=\frac{14}{15}-1+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{20}=$

$=\frac{56}{60}-\frac{60}{60}+\frac{15}{60}-\frac{40}{60}+\frac{9}{60}=$

$=\frac{-20}{60}=\frac{-1}{3}$

10 Calcula:

a) $\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{5}{3}:\frac{7}{6}}$　　　b) $\dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}:\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}$

a) $\dfrac{\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{5}{3}:\frac{7}{6}}=\dfrac{\frac{-3\cdot 8}{4\cdot 9}}{\frac{5\cdot 6}{3\cdot 7}}=\dfrac{\frac{-2}{3}}{\frac{10}{7}}=\frac{-2}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{-14}{30}=\frac{-7}{15}$

b) $\dfrac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}:\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{8}{8}+\frac{4}{8}-\frac{1}{8}}{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}-\frac{1}{8}}:\dfrac{\frac{21}{7}+\frac{1}{7}}{\frac{7}{14}+\frac{3}{14}}=$

$=\left(\frac{11}{8}:\frac{1}{8}\right):\left(\frac{22}{7}:\frac{10}{14}\right)=\left(\frac{11}{8}\cdot\frac{8}{1}\right):\left(\frac{22}{7}\cdot\frac{14}{10}\right)=$

$=11:\frac{22}{5}=11\cdot\frac{5}{22}=\frac{5}{2}$

Página 31

11 Expresa en el sistema sexagesimal $\frac{7}{3}$ de hora.

$\frac{7}{3}$ de hora = $\frac{7}{3}$ de 60 minutos = $7 \cdot 20$ = 140 minutos = 2 h y 20 minutos

12 Separa en cada fracción la parte entera, como en el ejemplo: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{-7}{3}$ c) $\frac{45}{5}$

d) $\frac{-48}{5}$ e) $\frac{93}{10}$ f) $\frac{2\,437}{621}$

a) $\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{-7}{3} = \frac{-6}{3} - \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

c) $\frac{45}{5} = 9$

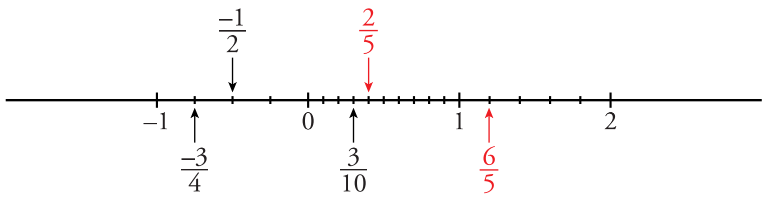
d) $\frac{-48}{5} = \frac{-45}{5} - \frac{3}{5} = -9 - \frac{3}{5}$

e) $\frac{93}{10} = \frac{90}{10} + \frac{3}{10} = 9 + \frac{3}{10}$

f) $\frac{2\,437}{621} = \frac{1\,863}{621} + \frac{574}{621} = 3 + \frac{574}{621}$

13 Representa en la recta numérica:

$$\frac{2}{5};\quad -\frac{3}{4};\quad -\frac{1}{2};\quad \frac{6}{5};\quad \frac{3}{10}$$



Potencias

14 Elimina paréntesis y simplifica:

a) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4$ b) $(-3)^5 : (-3)^3$ c) $\frac{6^2}{(-3)^4}$

d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3$ e) $\frac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(ab)^3 \cdot c}$ f) $\frac{(ab)^2 - (ab)^3}{(ab)^4}$

a) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 30^4$

b) $(-3)^5 : (-3)^3 = (-3)^2 = 3^2$

c) $\dfrac{6^2}{(-3)^4} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{3^4} = \dfrac{2^2}{3^2}$

d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3 = (2^4 \cdot 2^2) : (-4)^3 = 2^6 : (-2^6) = -1$

e) $\dfrac{a^2 \cdot (b \cdot c)^2}{(ab)^3 \cdot c} = \dfrac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^3 \cdot b^3 \cdot c} = \dfrac{c}{ab}$

f) $\dfrac{(ab)^2 - (ab)^3}{(ab)^4} = \dfrac{a^2b^2 - a^3b^3}{a^4b^4} = \dfrac{a^2b^2(1-ab)}{a^4b^4} = \dfrac{1-ab}{a^2b^2}$

15 Calcula:

a) $(-2)^4$ **b)** -2^4 **c)** $(-2)^3$

d) -2^3 **e)** 2^{-3} **f)** $(-2)^{-3}$

g) $(-1)^{16}$ **h)** $(-1)^{17}$ **i)** $(-1)^{8723}$

a) $(-2)^4 = 16$ b) $-2^4 = -16$ c) $(-2)^3 = -8$

d) $-2^3 = -8$ e) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ f) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$

g) $(-1)^{16} = 1$ h) $(-1)^{17} = -1$ i) $(-1)^{8723} = -1$

16 Reduce:

a) $\dfrac{-3^2}{(-3)^3}$ **b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-3}{2}\right)^4$ **c)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ **e)** $\dfrac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ **f)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2$

a) $\dfrac{-3^2}{(-3)^3} = \dfrac{-3^2}{-3^3} = \dfrac{1}{3}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2}$

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 : \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} = \dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2}{(2 \cdot 3)^3 \cdot (3^2)^2} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4} = \dfrac{2^7 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^7} = \dfrac{2^4}{3^5}$

f) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6$

17 Calcula:

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}-1\right)^2$

c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$ d) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1}$

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)^3 : \left(\frac{9-10}{8}\right)^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^3 : \left(\frac{-1}{8}\right)^2 =$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^6 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = -1$

b) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{6}-\frac{4}{6}\right)^2 - \left(\frac{8}{6}-\frac{5}{6}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^2 =$

$= \left(\frac{-3}{6}\right)^2 - \left(\frac{3}{6}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{6}{4}-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{9}-\frac{7}{9}\right)^{-1} + 4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 =$

$= \frac{-4^2 \cdot 9}{3 \cdot 4} + 4 = -12 + 4 = -8$

d) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{12}-\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{5}{4}-\frac{10}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}-\frac{16}{4}\right)^{-1} =$

$= \frac{-4}{12} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right)^{-1} =$

$= -\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{-4}{15}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

18 Reduce aplicando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{2^2 \cdot 3^4}{9 \cdot 12 \cdot 6}$ b) $\frac{4 \cdot 45 \cdot 24}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5}$ c) $\frac{8 \cdot 27^{-1}}{12^{-1}}$

a) $\dfrac{2^2 \cdot 3^4}{9 \cdot 12 \cdot 6} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{2^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{4 \cdot 45 \cdot 24}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = \dfrac{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2^4 \cdot 5} = 2$

c) $\dfrac{8 \cdot 27^{-1}}{12^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^{-3}}{2^{-2} \cdot 3^{-1}} = 2^5 \cdot 3^{-2} = \dfrac{2^5}{3^2}$

19 Calcula:

a) $\sqrt[3]{5^3}$ **b)** $\sqrt[3]{2^6}$ **c)** $\sqrt[4]{3^8}$ **d)** $(\sqrt[5]{7})^{10}$

a) $\sqrt[3]{5^3} = 5$

b) $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^{3 \cdot 2}} = 2^2 = 4$

c) $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{3^{4 \cdot 2}} = 3^2 = 9$

d) $(\sqrt[5]{7})^{10} = (\sqrt[5]{7})^{5 \cdot 2} = 7^2 = 49$

20 Simplifica:

a) $\sqrt{4a^4}$ **b)** $(\sqrt[3]{5a})^9$ **c)** $\sqrt[4]{(2b^2)^8}$

a) $\sqrt{4a^4} = \sqrt{2^2 \cdot a^{2 \cdot 2}} = 2a^2$

b) $(\sqrt[3]{5a})^9 = (\sqrt[3]{5a})^{3 \cdot 3} = (5a)^3 = 125a^3$

c) $\sqrt[4]{(2b^2)^8} = \sqrt[4]{(2b^2)^{4 \cdot 2}} = (2b^2)^2 = 4b^4$

21 Expresa el radicando como potencia y calcula:

a) $\sqrt[5]{243}$ **b)** $\sqrt[4]{625}$ **c)** $\sqrt[5]{3\,125}$ **d)** $\sqrt[6]{4\,096}$

a) $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

b) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

c) $\sqrt[5]{3\,125} = \sqrt[5]{5^5} = 5$

d) $\sqrt[6]{4\,096} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$

22 Calcula, sabiendo que estas raíces son exactas:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[8]{256}$ **c)** $\sqrt[3]{2\,197}$

d) $\sqrt[5]{100\,000}$ **e)** $\sqrt[5]{16\,807}$ **f)** $\sqrt[4]{81 \cdot 10^4}$

a) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b) $\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

c) $\sqrt[3]{2\,197} = \sqrt[3]{13^3} = 13$

d) $\sqrt[5]{100\,000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$

e) $\sqrt[5]{16\,807} = \sqrt[5]{7^5} = 7$

f) $\sqrt[4]{81 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{30^4} = 30$

23 **Simplifica:**

a) $\sqrt[3]{8a^3}$ b) $\sqrt[3]{8a^6}$ c) $\sqrt{64a^4}$ d) $\sqrt[4]{64a^4}$

a) $\sqrt[3]{8a^3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^3} = \sqrt[3]{(2a)^3} = 2a$

b) $\sqrt[3]{8a^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a^6} = 2a^2$

c) $\sqrt{64a^4} = \sqrt{2^6 \cdot a^4} = 2^3 \cdot a^2 = 8a^2$

d) $\sqrt[4]{64a^4} = \sqrt[4]{2a^6} \cdot a = \sqrt{2^3} \cdot a = \sqrt{2 \cdot 2^2} \cdot a = 2a\sqrt{2}$

Página 32

PIENSA Y RESUELVE

24 **Los $\frac{3}{8}$ de un poste están pintados de blanco; los $\frac{3}{5}$ del resto, de azul, y el resto, que mide 1,25 m, de rojo. ¿Cuál es la altura del poste? ¿Cuánto mide la parte pintada de azul?**

Pintados de blanco $\rightarrow \frac{3}{8} \rightarrow$ el resto es $\frac{5}{8}$

Pintados de azul $\rightarrow \frac{3}{5}$ del resto $= \frac{3}{5}$ de $\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Pintados de rojo $\rightarrow$ 1,25 m

Fracción pintada de blanco o azul $= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

El resto, que es $\frac{1}{4}$, está pintado de rojo, y representa 1,25 m $\rightarrow$

ALTURA DEL POSTE = 1,25 · 4 = 5 m

La parte pintada de azul mide $\frac{3}{8}$ de 5 = 1,875 m

25 **Una canica cae al suelo y se eleva cada vez a los $\frac{2}{3}$ de la altura anterior.**

Después de haber botado tres veces, se ha elevado 2 m de altura. ¿Desde qué altura cayó?

$\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ de la altura incial es 2 m $\rightarrow$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$ de la altura inicial = 2 m $\rightarrow \frac{8}{27}$ de la altura inicial = 2 m

Altura inicial $= \frac{2 \cdot 27}{8} = 6{,}75$ m

26 **Un depósito de agua tiene tres tomas de agua. Si se abren las tres, el depósito se llena en 2 horas. Abriendo las dos primeras, el depósito se llena en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría la tercera en llenar el depósito?**

- Si se abren las tres tomas:

  El depósito se llena en 2 h.

  En 1 h se llena $\frac{1}{2}$ del depósito.

- Si se abren las dos primeras tomas:

  El depósito se llena en 5 h.

  En 1 h se llena $\frac{1}{5}$ del depósito.

- Si se abre la tercera toma solamente:

  En 1 h se llenaría $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ del depósito.

  En $\frac{1}{3}$ de hora se llenaría $\frac{1}{10}$ del depósito.

  En $\frac{10}{3}$ de hora se llena $\frac{10}{10}$ del depósito.

  La tercera toma tarda en llenar el depósito $\frac{10}{3} = 3{,}33\ldots \approx 3$ h 20 min

27 **Una fuente puede llenar un depósito en 3 horas, y un desagüe vaciarlo en 4 horas. Estando $\frac{1}{3}$ del depósito lleno, se abren a la vez la fuente y el desagüe. ¿Al cabo de cuántas horas se llenarán los $\frac{3}{4}$ del depósito?**

El objetivo es calcular qué cantidad de agua queda en el depósito en 1 h.

- La fuente llena el depósito en 3 h $\rightarrow$ en 1 h llena $\frac{1}{3}$ del depósito.
- El desagüe vacía el depósito en 4 h $\rightarrow$ en 1 h vacía $\frac{1}{4}$ del depósito.

Antes de abrir la fuente y el desagüe, el depósito tenía $\frac{1}{3}$ de su capacidad, luego al cabo de 1 h, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ del depósito estará lleno.

Así, la cantidad que queda en el depósito al cabo de 1 h es:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

$\frac{5}{12}$ del depósito se llena en 1 h

$\frac{1}{12}$ del depósito se llena en $\frac{1}{5}$ de hora $= \frac{60}{5} = 12$ minutos

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ del depósito se llena en $9 \cdot 12 = 108$ min = 1 h 48 min

Los $\frac{3}{4}$ del depósito se llenarán al cabo de 1 h 48 min.

28 Un taxista cambia el aceite de su vehículo cada 3 500 km y le hace una revisión general cada 8 000 km. ¿Cada cuántos kilómetros coinciden ambas operaciones de mantenimiento?

Hay que calcular el m.c.m. (3 500, 8 000)

$$\left.\begin{array}{l} 3\,500 = 7 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \\ 8\,000 = 2^6 \cdot 5^3 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } (3\,500,\ 8\,000) = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 7 = 56\,000$$

Ambas operaciones de mantenimiento coincidirán cada 56 000 km.

29 De un solar se venden primero los 2/3 de su superficie y después los 2/3 de lo que quedaba. El ayuntamiento expropia los 3 200 m² restantes para un parque público. ¿Cuál era la superficie del solar?

1ª venta $\rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow$ queda por vender $\frac{1}{3}$

2ª venta $\rightarrow \frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Fracción que representa el solar vendido $= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

Fracción que representa el solar sin vender, que es la superficie expropiada:

$\frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$, que equivale a 3 200 m^2

La superficie del solar será $3\,200 \cdot 9 = 28\,800$ m^2

30 Un vendedor ambulante lleva una cesta de naranjas. En la primera casa que visita vende la mitad de las naranjas más media. En la segunda casa vende la mitad de las que le quedaban más media. En la tercera y en la cuarta casa, repite la misma operación, con lo que se le agota la mercancía. ¿Cuántas naranjas llevaba?

NOTA: **En ningún momento parte naranjas.**

El número total de naranjas es impar, ya que, en otro caso, al tomar la mitad de las naranjas más media, sería necesario partir una naranja por la mitad.

Supongamos que el número de naranjas que lleva el vendedor es a.

	VENDE	LE QUEDAN
1ª CASA	$\frac{a+1}{2}$	$a - \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2}$
2ª CASA	$\frac{a-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{a+1}{4}$	$\frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{4} = \frac{a-3}{4}$
3ª CASA	$\frac{a-3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{a+1}{8}$	$\frac{a-3}{4} - \frac{a+1}{8} = \frac{a-7}{8}$
4ª CASA	$\frac{a-7}{16} + \frac{8}{16} = \frac{a+1}{16}$	$\frac{a-7}{16} - \frac{a+1}{16} = \frac{a-15}{16}$

$$\frac{a-15}{16} = 0 \;\rightarrow\; a - 15 = 0 \;\rightarrow\; a = 15$$

El vendedor llevaba, en total, 15 naranjas.

31 ¿Cuántos números capicúas hay entre el 2 000 y el 5 000?

Los números capicúas que hay entre 2 000 y 3 000 son de la forma $2aa2$, siendo $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Hay 10 números capicúas entre 2 000 y 3 000.

Análogamente, entre 3 000 y 4 000 y entre 4 000 y 5 000:

$$3aa3 \;\rightarrow\; 10 \text{ capicúas}$$

$$4aa4 \;\rightarrow\; 10 \text{ capicúas}$$

El total de números capicúas entre 2 000 y 5 000 es de $10 \cdot 3 = 30$

32 Si multiplicas los números naturales de 1 a 50, ambos inclusive, ¿en cuántos ceros termina el resultado?

Hemos de ver cuántas veces aparece el producto $2 \cdot 5$, que da lugar a un cero al final del producto.

Descartando los números, del 1 al 50, que al descomponerlos en factores no tienen ni 2 ni 5, obtenemos:

	2	4	5	6	8	10	12	14	15	16	18	20	
FACTOR 2	2	2^2		2	2^3	2	2^2	2		2^4	2	2^2	→ 18 veces
FACTOR 5			5			5			5			5	→ 4 veces

	22	24	25	26	28	30	32	34	35	36	38	40	
FACTOR 2	2	2^3		2	2^2	2	2^5	2		2^2	2	2^3	→ 21 veces
FACTOR 5			5^2			5			5			5	→ 5 veces

	42	44	45	46	48	50	
FACTOR 2	2	2^2		2	2^4	2	→ 9 veces
FACTOR 5			5			5^2	→ 3 veces

El factor 2 aparece en 48 ocasiones y el 5 en 12.

En total, el producto 2 · 5 aparece 12 veces.

Por tanto, el producto 1 · 2 · 3 · … · 49 · 50 acaba en 12 ceros.

33 **Observa este cuadrado mágico:**

En él se han colocado los números del 1 al 16 de forma que todas las líneas (filas, columnas y diagonales) suman lo mismo.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

a) Construye otro cuadrado mágico con los números del 66 al 81.

b) Construye otro con los números 20, 25, 30, 35, … 95.

66	79	80	69
77	72	71	74
73	76	75	70
78	67	68	81

a) El lugar que ocupa el 1 corresponde al 66; el del 2, al 67; el del 3, al 68…; el del 16 al 81.

Las filas, columnas y diagonales suman 294.

20	85	90	35
75	50	45	60
55	70	65	40
80	25	30	95

b) El 20 ocupará el lugar del 1; el 25, el del 2; el 30, el del 3, y así sucesivamente, hasta el 95, que ocupa el lugar del 16.

En este cuadrado mágico, las líneas suman 230.

Página 33

34 **a) Calcula el punto medio entre cada uno de estos pares de números racionales:**

$$0 \text{ y } 1 \qquad \frac{1}{2} \text{ y } 1 \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{2} \text{ y } \frac{5}{8}$$

b) Representa esos valores en la recta numérica.

c) ¿Es racional el valor medio entre dos racionales? Esto es, ¿se puede expresar como una fracción?

d) ¿Podrías seguir colocando valores medios entre los obtenidos? ¿Cuántos podrías colocar?

e) ¿Cuántos números racionales hay entre 0 y 1? ¿Cuántos racionales hay entre dos racionales cualesquiera?

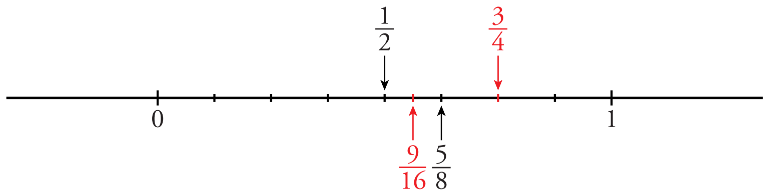
a) Entre 0 y 1 $\rightarrow$ $\frac{1}{2}$

Entre $\frac{1}{2}$ y 1 $\rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}+1\right):2=\frac{3}{2}:2=\frac{3}{4}$

Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right):2=\frac{5}{4}:2=\frac{5}{8}$

Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{8}$ $\rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right):2=\frac{9}{8}:2=\frac{9}{16}$

b)



c) Sí, el punto medio entre dos racionales también es racional.

d) Entre los valores obtenidos $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{4}$ se pueden colocar infinitos valores medios.

e) En general, entre dos números racionales hay infinitos racionales.

35 **Una máquina transforma fracciones de forma que si entra una fracción F la convierte en una nueva fracción:**

$$\frac{1-F}{1+F}$$

Por ejemplo, entra $\frac{1}{2}$ y sale $\frac{1}{3}$. Compruébalo.

Pues bien, supongamos que entra la fracción $\frac{2}{5}$ y el resultado vuelve a introducirse en la máquina, repitiendo el proceso mil veces. ¿Cuál será la fracción obtenida al final?

Si $F=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$

Si $F=\frac{2}{5}$ $\rightarrow$ $\dfrac{1-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{3}{7}$

Reiteramos el proceso para $F = \frac{3}{7} \quad \to \quad \dfrac{1 - \frac{3}{7}}{1 + \frac{3}{7}} = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{10}{7}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

es decir, obtenemos de nuevo $\frac{2}{5}$.

Así, en los procesos que ocupan un lugar impar, se obtiene como fracción $\frac{3}{7}$;

y en los procesos que ocupan un lugar par, 2, 4, 6, se obtiene como fracción $\frac{2}{5}$.

Al cabo de 1 000 veces se obtiene como fracción $\frac{2}{5}$.