Página 158

PRACTICA

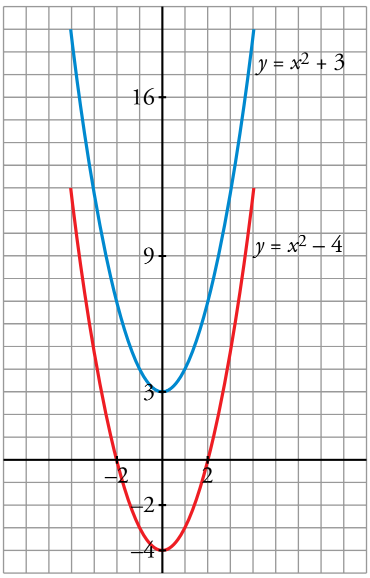
Funciones cuadráticas

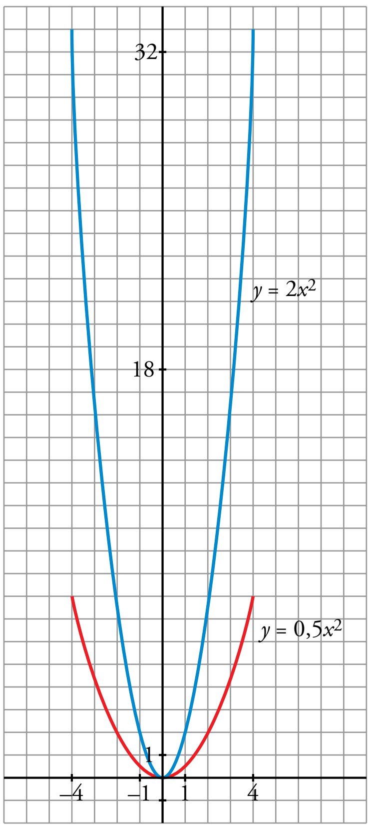
1 Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

x	$y = x^2 + 3$	$y = x^2 - 4$	$y = 2x^2$	$y = 0{,}5x^2$
–4	19	12	32	8
–3	12	5	18	4,5
–2	7	0	8	2
–1	4	–3	2	0,5
0	3	–4	0	0
1	4	–3	2	0,5
2	7	0	8	2
3	12	5	18	4,5
4	19	12	32	8
VÉRTICE	(0, 3)	(0, –4)	(0, 0)	(0, 0)



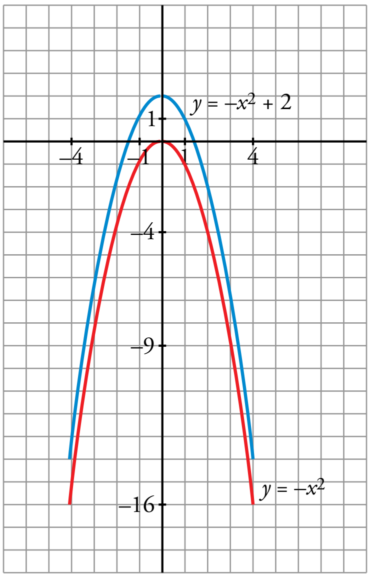


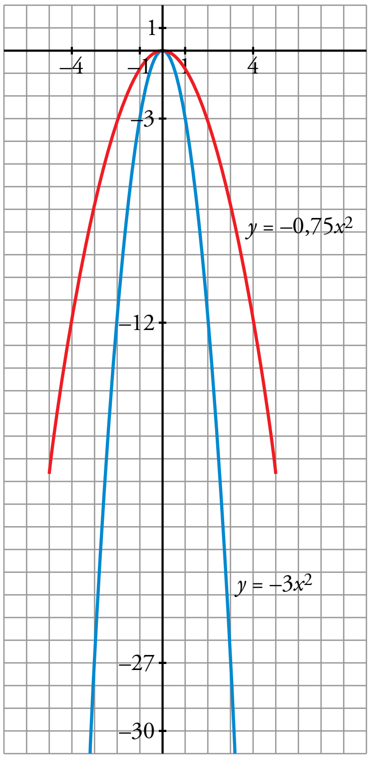
2 **Haz una tabla de valores como la del ejercicio anterior para representar cada una de las funciones siguientes:**

a) $y = -x^2$ b) $y = -x^2 + 2$ c) $y = -3x^2$ d) $y = -0{,}75x^2$

Di cuál es el vértice de cada una de estas parábolas.

x	$y = -x^2$	$y = -x^2 + 2$	$y = -3x^2$	$y = -0{,}75x^2$
–4	–16	–14	–48	–12
–3	–9	–7	–27	–6,75
–2	–4	–2	–12	–3
–1	–1	1	–3	–0,75
0	0	2	0	0
1	–1	1	–3	–0,75
2	–4	–2	–12	–3
3	–9	–7	–27	–6,75
4	–16	–14	–48	–12
VÉRTICE	(0, 0)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 0)





3 **Representa las siguientes parábolas, hallando los puntos de corte con los ejes, el vértice y algunos puntos próximos a él:**

a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ d) $y = -x^2 + 3x - 4$

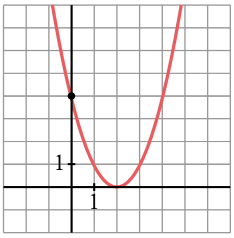
a) $y = (x - 2)^2$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$ raíz doble $\rightarrow (2, 0)$

Eje Y: $y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Vértice: $(2, 0)$



Puntos próximos al vértice

x	–1	1	3	4
y	9	1	1	4

b) $y = 2x^2 - 8x + 2$

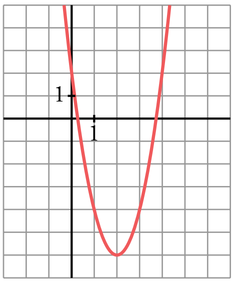
Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $2x^2 - 8x + 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 2 \pm \sqrt{3} \begin{cases} (2 + \sqrt{3}, 0) \approx (3{,}73; 0) \\ (2 - \sqrt{3}, 0) \approx (0{,}27; 0) \end{cases}$$

Eje Y: $y = 2 \rightarrow (0, 2)$



Vértice: $(2, -6)$

Puntos próximos al vértice:

x	–1	1	3	4
y	12	–4	–4	2

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$

Puntos de corte con los ejes:

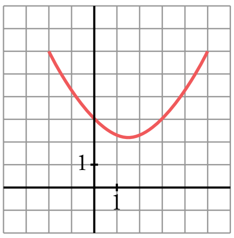
Eje X: $\frac{1}{3}x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2/3}$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 3 \rightarrow (0, 3)$

Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:



x	–1	1	3
y	13/3	7/3	3

d) $y = -x^2 + 3x - 4$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \to \quad \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{-2}$

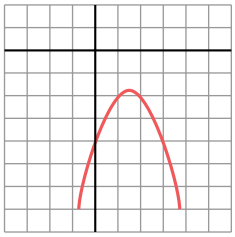
No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = -4 \quad \to \quad (0, -4)$

Vértice: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{4}\right)$

Puntos próximos al vértice:

x	-1	1	2	3
y	-8	-2	-2	-4



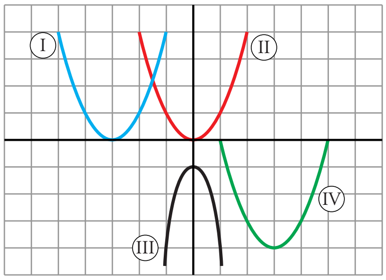
4 **Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:**

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 - 6x + 5$

c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = -3x^2 - 1$



a) II b) IV c) I d) III

Otras funciones

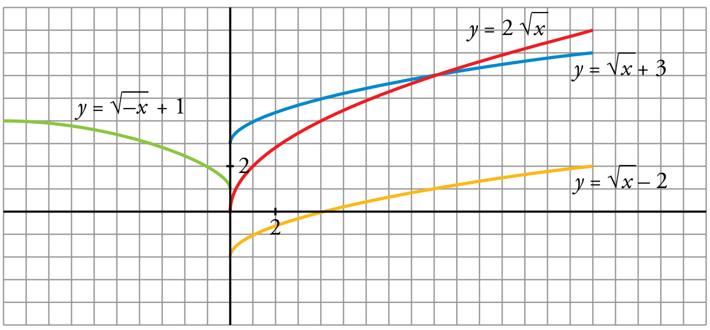
5 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = 3 + \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{x} - 2$

c) $y = 2\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x} + 1$



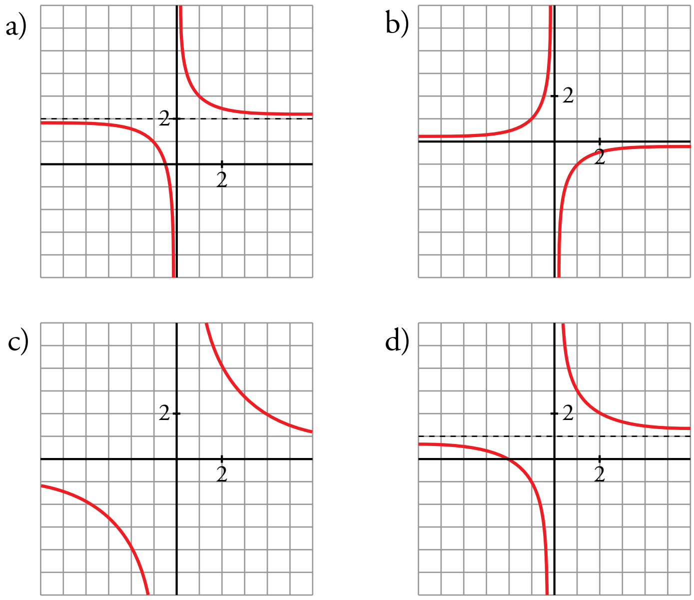
6 **Dibuja la gráfica de las funciones siguientes:**

a) $y = \frac{1}{x} + 2$

b) $y = -\frac{1}{x}$

c) $y = \frac{8}{x}$

d) $y = \frac{2}{x} + 1$



7 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como la del ejercicio 1.**

(Ayúdate de la calculadora).

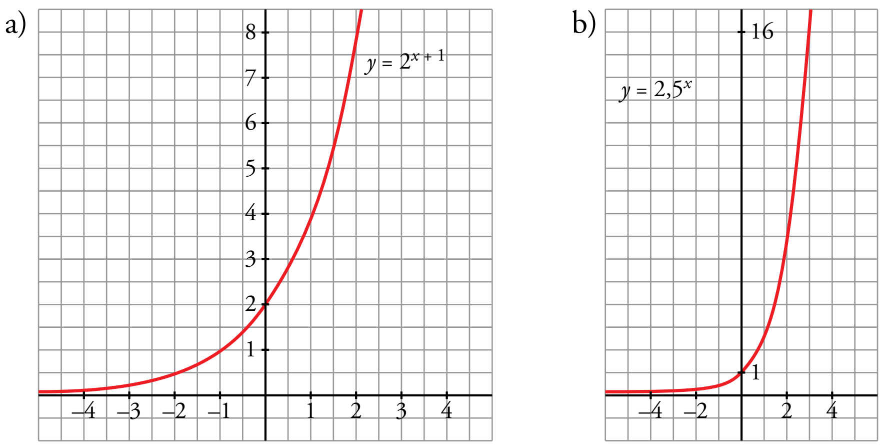
a) $y = 2^{x+1}$

b) $y = 2,5^x$

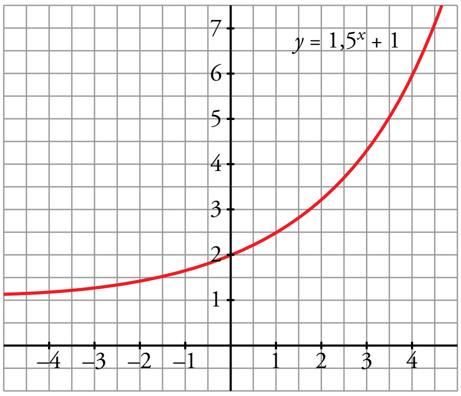
c) $y = 1,5^x + 1$

d) $y = 2^x - 3$

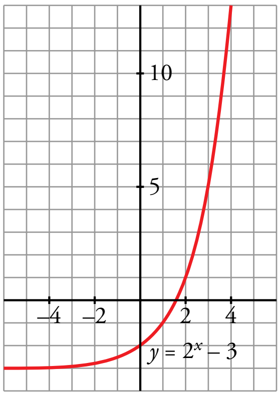
x	2^{x-1}	$2,5^x$	$1,5^x + 1$	$2^x - 3$
–4	0,125	0,026	1,2	–2,9375
–3	0,25	0,064	1,3	–2,875
–2	0,5	0,16	1,44	–2,75
–1	1	0,4	1,67	–2,5
0	2	1	1	–2
1	4	2,5	2,5	–1
2	8	6,25	3,25	1
3	16	15,625	4,38	5
4	32	39,063	6,06	13



c)



d)



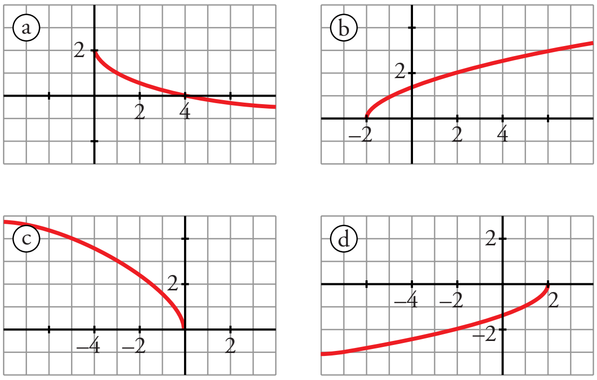
8 **Asocia a cada gráfica la fórmula que le corresponde:**

I) $y = \sqrt{x+2}$

II) $y = 2 - \sqrt{x}$

III) $y = -\sqrt{2-x}$

IV) $y = \sqrt{-3x}$



I $\leftrightarrow$ b) II $\leftrightarrow$ a)

III $\leftrightarrow$ d) IV $\leftrightarrow$ c)

Página 159

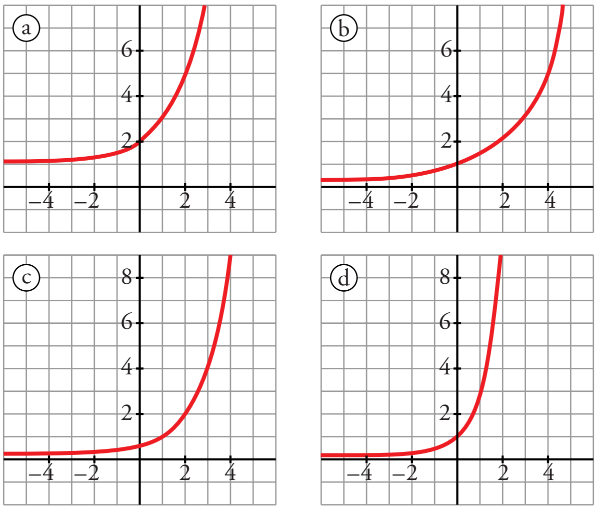
9 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = 3^x$

II) $y = 1{,}5^x$

III) $y = 2^{x-1}$

IV) $y = 2^x + 1$



I) $\rightarrow$ d)

II) $\rightarrow$ b)

III) $\rightarrow$ c)

IV) $\rightarrow$ a)

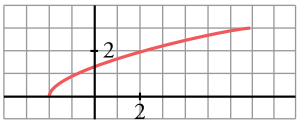
10 **Estudia el dominio de definición de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \sqrt{x+2}$ b) $y = \sqrt{4-x}$

c) $y = \sqrt{2x-5}$ d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

a) $y = \sqrt{x+2}$

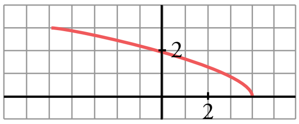
$x + 2 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq -2 \ \rightarrow$ Dominio $= [-2, +\infty)$



b) $y = \sqrt{4-x}$

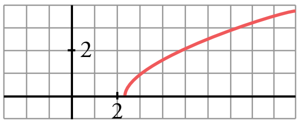
$4 - x \geq 0 \ \rightarrow \ -x \geq -4 \ \rightarrow \ x \leq 4$

Dominio $= (-\infty, 4]$



c) $y = \sqrt{2x-5}$

$2x - 5 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq \dfrac{5}{2} \ \rightarrow$ Dominio $= \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$



d) $y = 1 + \sqrt{-2x}$

$-2x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 0 \ \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 0]$

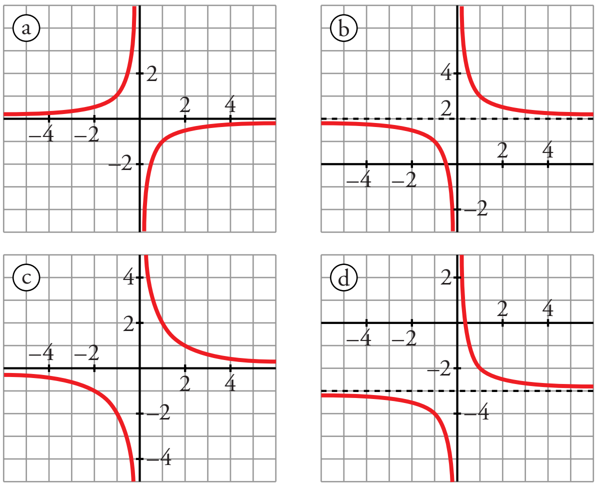
11 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

I) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

II) $y = \dfrac{2}{x}$

III) $y = \dfrac{1}{x} - 3$

IV) $y = -\dfrac{1}{x}$



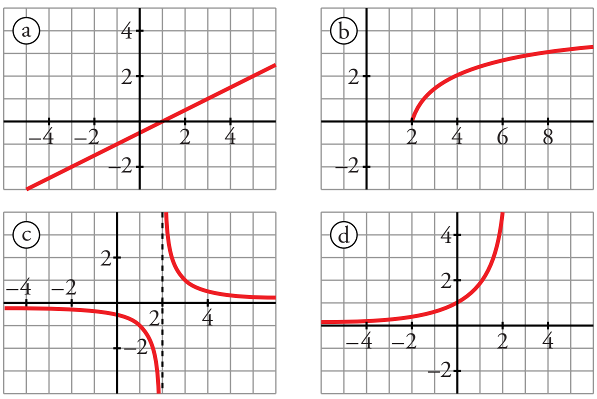
I) $\rightarrow$ b)

II) $\rightarrow$ c)

III) $\rightarrow$ d)

IV) $\rightarrow$ a)

12 **¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $y = \dfrac{1}{x-2}$?**



La función $y = \dfrac{1}{x-2}$ es una hipérbola cuyas asíntotas son el eje de abscisas ($y = 0$) y la recta $x = 2$.

Le corresponde la gráfica c).

PIENSA Y RESUELVE

13 **La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s, es:**

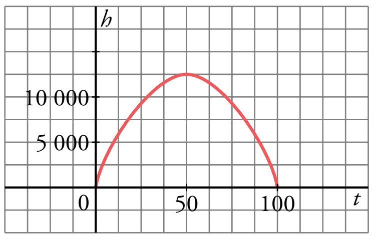
$$h = 500t - 5t^2$$

a) Haz una representación gráfica.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?

d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil está a una altura superior a los 4 500 metros?

a) 

b) Dominio = [0, 100]

c) La altura máxima es alcanzada a los 50 segundos, a una altura de 12 500 metros.

d) Queremos saber cuándo $h > 4\,500$ metros:

$$500t - 5t^2 > 4\,500 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$t = \frac{-500 \pm \sqrt{250\,000 - 90\,000}}{-10} = \frac{-500 \pm \sqrt{160\,000}}{-10} =$$

$$= \frac{-500 \pm 400}{-10} \begin{cases} t = 10 \\ t = 90 \end{cases}$$

Si $t < 10 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Si $10 < t < 90 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 > 0$

Si $t > 90 \;\rightarrow\; -5t^2 + 500t - 4\,500 < 0$

Luego, $h > 4\,500$ m en el intervalo (10, 90).

14 **Las ventanas de un edificio de oficinas han de tener 2 m^2 de área.**

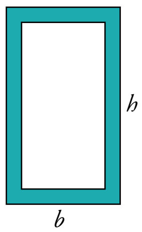
a) Haz una tabla que muestre cómo varía la altura de las ventanas según la longitud de la base.

b) Representa la función *base-altura*.

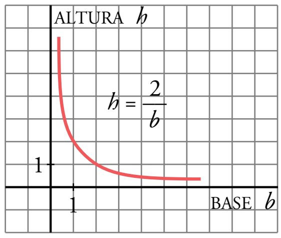
El área de la ventana es: $b \cdot h = 2\text{ m}^2$

La función que nos da la altura en función de la variación de la base es: $h = \dfrac{2}{b}$

Tabla de valores:



b	h
0,25	8
0,5	4
1	2
1,25	1,6
1,5	$1,\widehat{3}$
1,75	1,14



15 **Con un listón de madera de 3 metros de largo queremos fabricar un marco para un cuadro.**

a) Si la base midiera 0,5 m, ¿cuánto medirían la altura y la superficie del cuadro?

b) ¿Cuál es el valor de la superficie para una base cualquiera x?

c) ¿Para qué valor de la base se obtiene la superficie máxima?

d) ¿Cuánto vale dicha superficie?

a) $x \to$ base: $2 \cdot 0{,}5 + 2y = 3 \to y = 1$

$y \to$ altura

La altura mediría 1 m.

Área $= x \cdot y = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$. La superficie sería de 0,5 m^2.

b) $2x + 2y = 3 \to y = \dfrac{3-2x}{2}$

Área $= x \cdot y \to$ Área $= x \cdot \left(\dfrac{3-2x}{2}\right)$

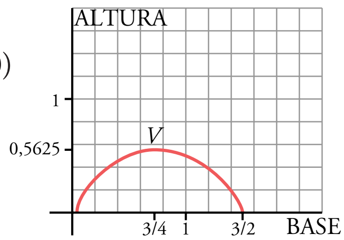
c) y d) Dibujamos la función $y = \dfrac{x(3-2x)}{2}$

Puntos de corte:

Eje X: $x(3-2x) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = 3/2 \to (3/2, 0) \end{cases}$

Eje Y: $y = 0 \to (0, 0)$

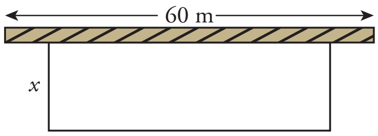
Vértice: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{9}{16}\right)$



La superficie máxima es $\dfrac{9}{16} = 0{,}5625$ m^2, que corresponde a un marco cuadrado de lado 0,75 m.

Página 160

16 **Con 100 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 60 m.**



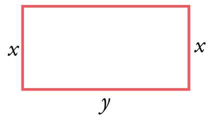
a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área. ¿Cuándo se hace máxima y cuánto vale ese máximo?

c) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) $2x + y = 100 \quad \rightarrow \quad y = 100 - 2x$

El lado de enfrente a la pared mide: $100 - 2x$.



b) Área $= xy \quad \rightarrow \quad$ Área $= x(100 - 2x)$

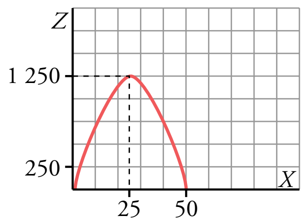
Representamos la función $z = x(100 - 2x)$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x(100 - 2x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \text{ m} \\ x = 50 \text{ m} \end{array} \right.$

Eje Z: $z = 0 \quad \rightarrow \quad (0, 0)$

Vértice: $(25, 1\,250)$



Se hace máxima el área cuando: $\begin{cases} x = 25 \text{ m} \\ y = 50 \text{ m} \end{cases}$

El área máxima es de $1\,250 \text{ m}^2$

c) Dominio de definición: $(0, 50)$

17 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

18 **Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$

Resolución analítica

Vemos los puntos de corte:

$2x^2 - 5x - 6 = 3x + 4 \;\rightarrow\; 2x^2 - 8x - 10 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x = 5 \;\rightarrow\; y = 19 \\ x = -1 \;\rightarrow\; y = 1 \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: (5, 19), (–1, 1).

Resolución gráfica

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

- $y = 2x^2 - 5x - 6$

  Puntos de corte con los ejes:

  Eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0 \;\rightarrow$

  $$\rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{4} = \begin{cases} x = \left(\dfrac{5 + \sqrt{73}}{4}, 0\right) \\ x = \left(\dfrac{5 - \sqrt{73}}{4}, 0\right) \end{cases}$$

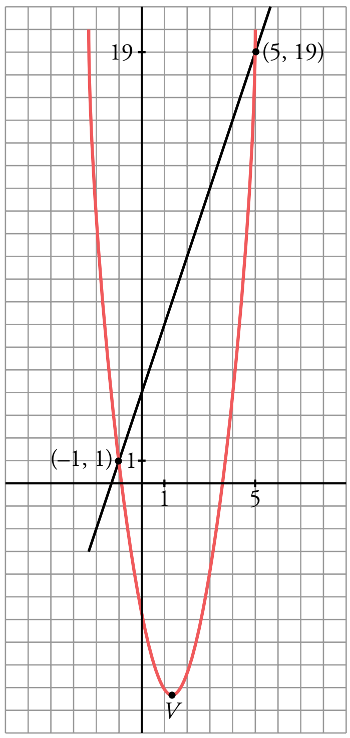
  Eje Y: $y = -6 \;\rightarrow\; (0, -6)$

  Vértice: $\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{73}{8}\right)$

- $y = 3x + 4$

  Hacemos una tabla de valores:

x	–1	5
y	1	19



b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Resolución analítica

Puntos de corte entre ambas:

$$x^2 - 2x + 1 = -2x + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1 \;\rightarrow\; y = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 4).

Resolución gráfica

Representamos en unos mismos ejes ambas funciones:

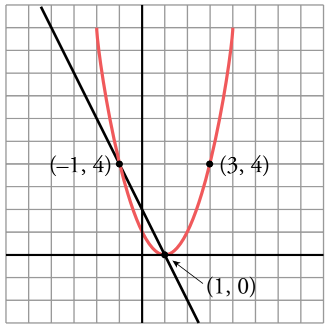
- $y = x^2 - 2x + 1$

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \rightarrow$ raíz doble: (1, 0)

Eje Y: $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

Vértice: (1, 0)



- $y = -2x + 2$

Hacemos una tabla de valores:

x	1	–1
y	0	4

19 **El coste por unidad de fabricación de unas pegatinas disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función:**

$$y = \frac{0{,}5x + 10}{x}$$

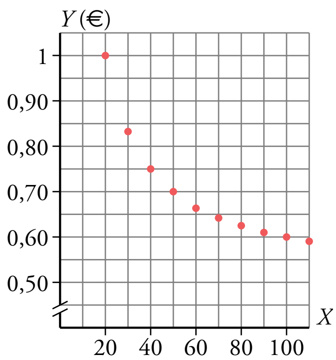
a) Haz la gráfica correspondiente. ¿Se pueden unir los puntos que has representado?

b) ¿Cuál será el coste cuando el número de pegatinas se hace muy grande?

$$y = \frac{0{,}5x + 10}{x}$$

a) Hacemos la tabla de valores:

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	1	$0{,}8\widehat{3}$	0,75	0,7	$0{,}\widehat{6}$	0,64	0,625	$0{,}\widehat{61}$	0,6



No se pueden unir los puntos, ya que el número de pegatinas es un número entero (y positivo).

b) Hacemos una tabla de valores con el número de pegatinas muy alto:

x	1 000	10 000	100 000	1 000 000
y	0,51	0,501	0,5001	0,50001

El coste de las pegatinas, si el número de estas es muy grande, es de 50 céntimos por pegatina.

20 **Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son: $G(x) = 20\,000 + 250x$ € y los ingresos que se obtienen por las ventas son: $I = 600x - 0{,}1x^2$ €. ¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?**

La función beneficio es:

$B = I - G = 600x - 0{,}1x^2 - (20\,000 + 250x) \rightarrow$

$\rightarrow B(x) = -0{,}1x^2 + 350x - 20\,000$

El vértice es el máximo: $V = \dfrac{-350}{-2 \cdot 0{,}1} = 1\,750$

Se deben fabricar 1 750 ordenadores para que el beneficio sea máximo.

21 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 3) y (1; 3,6).**

a) Calcula k y a. b) ¿Es creciente o decreciente? c) Representa la función.

a) Si pasa por el punto (0, 3) $\rightarrow 3 = ka^0 \rightarrow k = 3$

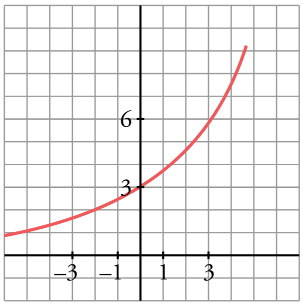
Si pasa por el punto (1; 3,6) $\rightarrow 3{,}6 = ka^1 \rightarrow 3{,}6 = 3a \rightarrow a = 1{,}2$

Tenemos la función $y = 3 \cdot (1{,}2)^x$

b) Es una función creciente.

c) Hacemos una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2,08	2,5	3	3,6	4,32	5,18



22 **La función exponencial $y = ka^x$ pasa por los puntos (0, 2) y (2; 1,28). Calcula k y a y representa la función.**

Si pasa por el punto (0, 2), entonces:

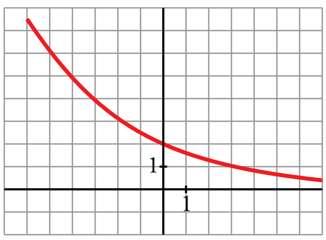
$$2 = k \cdot a^0 \rightarrow 2 = k$$

Si pasa por el punto (2; 1,28), entonces:

$1{,}28 = k \cdot a^2 \rightarrow 1{,}28 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 0{,}64 \rightarrow a = 0{,}8$

La función es: $y = 2 \cdot (0{,}8)^x$

x	y
–3	3,906
–2	3,125
–1	2,5
0	2
1	1,6
2	1,28
3	1,024



23 **Llamamos inflación a la pérdida de valor del dinero; es decir, si un artículo que costó 100 € al cabo de un año cuesta 115 €, la inflación habrá sido del 15%.**

Supongamos una inflación constante del 15% anual. ¿Cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 50 000 euros?

$P = 50\,000 \cdot (1{,}15)^5 = 100\,567{,}86$ € costará el terreno dentro de cinco años.

24 **En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual.**

Si el precio era de 250 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

$P_5 = 250 \cdot (1{,}05)^5 = 319{,}07$ € pagará dentro de cinco años.

La función que relaciona el precio del alquiler con los años transcurridos es $P = 250 \cdot 1{,}05^t$.

Página 161

25 **Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual. ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?**

Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos, y calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

$P_4 = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}12)^4 = 20\,000 \cdot 0{,}88^4 \approx 11\,993{,}90$ €

$P = 20\,000 \cdot 0{,}88^t$

Si el precio final es de 10 000 euros:

$10\,000 = 20\,000 \cdot 0{,}88^t \rightarrow 0{,}5 = 0{,}88^t \rightarrow t \approx 5{,}4$ años

26 **En un bosque en etapa de crecimiento se mide el volumen de madera y se obtiene 10 250 m³. Se observa que el bosque crece a un ritmo de un 2% anual.**

a) ¿Cuánta madera tendrá dentro de 10 años?

b) ¿Cuál es la función que da la cantidad de madera según los años transcurridos, suponiendo que se mantenga el ritmo de crecimiento?

a) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^{10} = 12\,494{,}7$ m^3 de madera habrá dentro de diez años.

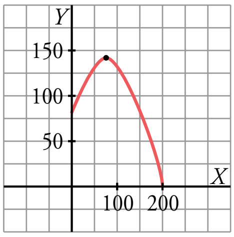
b) $V = 10\,250 \cdot (1{,}02)^t$

27 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg.**

¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

La función que representa el coste de todas las naranjas en función del número de días que ha pasado es: $y = (200 - x)\,(0{,}4 + 0{,}01x)$

Dibujamos esta función y vemos cuál es su máximo:



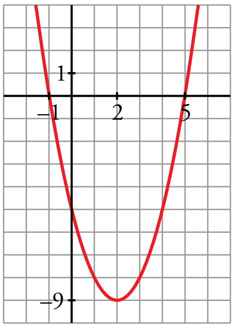
$V = (80,\ 144)$

Se han de vender dentro de 80 días, y el beneficio será de 144 €.

28 **a) Estudia, sobre la gráfica de la función $y = x^2 - 4x - 5$, para qué valores de x se verifica $x^2 - 4x - 5 > 0$.**

b) ¿Qué valores de x cumplirán la desigualdad $x^2 - 4x - 5 \leq 0$?

a) Representamos la parábola $y = x^2 - 4x - 5$.



Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $y = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \;\rightarrow\; (5,\ 0) \\ x_2 = -1 \;\rightarrow\; (-1,\ 0) \end{cases}$$

Eje Y: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -5 \;\rightarrow\; (0,\ -5)$

Vértice: $(2,\ -9)$

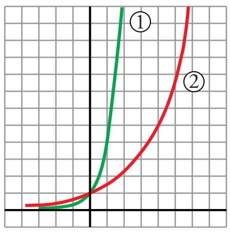
$x^2 - 4x - 5 > 0$ es el intervalo que queda por encima del eje X.

Luego $x^2 - 4x - 5 > 0$ ocurre en $(-\infty,\ -1) \cup (5,\ +\infty)$

b) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ es el intervalo de la gráfica que queda por debajo del eje X; luego $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ ocurre en $[-1,\ 5]$.

29 **La expresión analítica de estas dos gráficas es de la forma $y = a^x$. Di el valor de a en cada una de ellas.**

(En los ejes se ha tomado la misma escala).



1) $a = 4 \;\rightarrow\; y = 4^x$

2) $a = 1{,}5 \;\rightarrow\; y = 1{,}5^x$

30 **Todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ pasan por un mismo punto. Di cuál es y justifícalo. ¿En qué casos la función es decreciente?**

Todas las exponenciales de este tipo pasan por el punto $(0,\ 1)$ porque cualquier número elevado a cero es uno.

La función es decreciente cuando $0 < a < 1$.

31 Calcula b para que el vértice de la parábola $y = x^2 + bx + 10$ esté en el punto (3, 1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

La abscisa del vértice es: $V_a = \frac{-b}{2a}$. En este caso: $a = 1$, $V_a = 3$.

$3 = \frac{-b}{2 \cdot 1} \rightarrow b = -6$

El eje de simetría es la recta $x = 3$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X: $x^2 - 6x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje X.

Eje Y: $y = 10 \rightarrow$ El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 10).

32 ¿Cuánto debe valer k para que la parábola $y = 4x^2 - 20x + k$ tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de k no cortará al eje X?

Para calcular los puntos de corte con el eje X, hacemos:

$4x^2 - 20x + k = 0 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 16k}}{8}$

Para que solo haya una solución en esta ecuación:

$400 - 16k = 0 \rightarrow k = \frac{400}{16} = 25$

Solo hay un punto de corte con el eje X si $k = 25$.

$400 - 16k < 0 \rightarrow -16k < -400 \rightarrow k > 25$

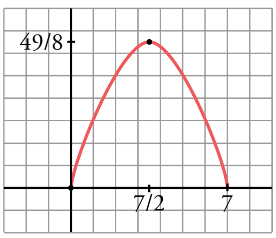
La parábola no corta al eje X si $k > 25$.

33 La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si, además, sabes que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 6), ¿cómo calcularías a y b? Halla a y b y representa la parábola.

Si pasa por el origen de coordenadas, cuando $x = 0 \rightarrow y = 0$

Por tanto: $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 0$

Por otro lado: $\left.\begin{array}{l} 3 = a + b \\ 6 = 16a + 4b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} -12 = -4a - 4b \\ 6 = 16a + 4b \\ \hline -6 = 12a \end{array} \rightarrow a = \frac{-1}{2}$



$b = 3 + \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{7}{2}$

La parábola es: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x \qquad V = \left(\frac{7}{2}, \frac{49}{8}\right)$