

Página 37

PRACTICA

Aproximación y errores

1 Expresa con un número adecuado de cifras significativas:

- a) Audiencia de un programa de televisión: 3 017 849 espectadores.
- b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.
- c) Resultado de 15^7 .
- d) Fuerza de atracción entre dos cuerpos: 18 753 N.
- e) Presupuesto de un ayuntamiento: 987 245 €.
- f) Porcentaje de votos de un candidato a delegado: 37,285%.
- g) Capacidad de un pantano: 3 733 827 000 l.

- a) 3 000 000 espectadores
- b) 0,008 mm
- c) $15^7 = 170\,859\,375 \rightarrow 170\,000\,000$
- d) 19 000 N
- e) 1 000 000 €
- f) 37%
- g) 3 750 000 000 l

2 Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.

Dado que:

$$\text{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor de la medición}|$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}},$$

obtendríamos:

a) Error absoluto = 17 849

$$\text{Error relativo} = \frac{17\,849}{3\,017\,849} \approx 0,006$$

b) Error absoluto = 0,000375

$$\text{Error relativo} = \frac{0,000375}{0,008375} \approx 0,04$$

- c) Error absoluto = 859 375
 Error relativo = $\frac{859\,375}{170\,859\,375} \approx 0,005$
- d) Error absoluto = 247
 Error relativo = $\frac{247}{18\,753} \approx 0,013$
- e) Error absoluto = 12 755
 Error relativo = $\frac{12\,755}{987\,245} \approx 0,013$
- f) Error absoluto = 0,285
 Error relativo = $\frac{0,285}{37,285} \approx 0,007$
- g) Error absoluto = 16 173 000
 Error relativo = $\frac{16\,173\,000}{3\,733\,827\,000} \approx 0,004$

3 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

4 Da una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes aproximaciones:

- a) Radio de la Tierra: 6 400 km.
 b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.
 c) Habitantes de España: 41 millones.
 d) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,007 segundos.
 e) Volumen de una gota de agua: 0,4 mm³.

a) Cota del error absoluto: $\frac{100}{2} = 50$

Cota del error relativo: $\frac{50}{6\,400} \approx 0,008$

b) Cota del error absoluto: $\frac{10\,000\,000}{2} = 5\,000\,000$

Cota del error relativo: $\frac{5\,000\,000}{150\,000\,000} \approx 0,03$

c) Cota del error absoluto: 500 000

Cota del error relativo: $\frac{500\,000}{40\,000\,000} \approx 0,12$

d) Cota del error absoluto: $\frac{0,001}{2} = 0,0005$

Cota del error relativo: $\frac{0,0005}{0,007} \approx 0,07$

e) Cota del error absoluto: $\frac{0,1}{2} = 0,05$

Cota del error relativo: $\frac{0,05}{0,4} \approx 0,125$

Notación científica

5 Expresa con todas las cifras:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|-----------------------|
| a) $6,25 \cdot 10^8$ | b) $2,7 \cdot 10^{-4}$ | c) $3 \cdot 10^{-6}$ |
| d) $5,18 \cdot 10^{14}$ | e) $3,215 \cdot 10^{-9}$ | f) $-4 \cdot 10^{-7}$ |
| a) 625 000 000 | b) 0,00027 | c) 0,000003 |
| d) 518 000 000 000 000 | e) 0,000000003215 | f) $-0,0000004$ |

6 Escribe en notación científica:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------------|
| a) 4 230 000 000 | b) 0,00000004 | | |
| c) 84 300 | d) $-0,000572$ | | |
| a) $4,23 \cdot 10^9$ | b) $4 \cdot 10^{-8}$ | c) $8,43 \cdot 10^4$ | d) $-5,72 \cdot 10^{-4}$ |

7 Expresa en notación científica:

- a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.
- b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos: 5 228,5 miles de millones.
- c) Radio del átomo de oxígeno: 0,000000000066 m
- a) $1\,628\,000\,000 = 1,628 \cdot 10^9$
- b) $5\,228,5$ miles de millones = $5,2285 \cdot 10^{12}$
- c) $0,000000000066 \text{ m} = 6,6 \cdot 10^{-11}$

8 Halla una cota del error absoluto y otra del error relativo de los siguientes redondeos dados en notación científica:

- | | | |
|------------------------|----------------------|--------------------------|
| a) $9,254 \cdot 10^5$ | b) $3,7 \cdot 10^8$ | c) $5,28 \cdot 10^{-6}$ |
| d) $8,4 \cdot 10^{-3}$ | e) $1,95 \cdot 10^6$ | f) $2,185 \cdot 10^{-8}$ |

a) $9,254 \cdot 10^5 = 9\,254 \cdot 10^2 \rightarrow$ Cota del error absoluto: $\frac{100}{2} = 50$

Cota del error relativo: $\frac{50}{9,254 \cdot 10^5} \approx$
 $\approx 0,00005$

$$b) 3,7 \cdot 10^8 = 37 \cdot 10^7 \rightarrow \text{Cota del error absoluto: } \frac{10\,000\,000}{2} = 5\,000\,000$$

$$\text{Cota del error relativo: } \frac{5\,000\,000}{3,7 \cdot 10^8} \approx 0,0135$$

$$c) \text{Cota del error absoluto: } \frac{0,000001}{2} = 0,0000005$$

$$\text{Cota del error relativo: } \frac{0,0000005}{5,28 \cdot 10^{-6}} \approx 0,095$$

$$d) \text{Cota del error absoluto: } \frac{0,001}{2} = 0,0005$$

$$\text{Cota del error relativo: } \frac{0,0005}{8,4 \cdot 10^{-3}} \approx 0,06$$

$$e) 1,95 \cdot 10^6 = 195 \cdot 10^4 \rightarrow \text{Cota del error absoluto: } \frac{10\,000}{2} = 5\,000$$

$$\text{Cota del error relativo: } \frac{5\,000}{1,95 \cdot 10^6} \approx 0,0025$$

$$f) \text{Cota del error absoluto: } \frac{0,00000001}{2} = 0,000000005$$

$$\text{Cota del error relativo: } \frac{0,000000005}{2,185 \cdot 10^{-8}} \approx 0,23$$

9 Calcula con lápiz y papel y comprueba después el resultado con la calculadora:

$$a) (2 \cdot 10^5) \cdot (1,5 \cdot 10^7)$$

$$b) (3 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,1 \cdot 10^4)$$

$$c) (1,25 \cdot 10^{-17}) \cdot (4 \cdot 10^{13})$$

$$d) (2,4 \cdot 10^{-7}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$$

$$a) (2 \cdot 1,5) \cdot 10^{5+7} = 3 \cdot 10^{12}$$

$$b) (3 \cdot 2,1) \cdot 10^{-8+4} = 6,3 \cdot 10^{-4}$$

$$c) (1,25 \cdot 4) \cdot 10^{-17+13} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$d) (2,4 \cdot 5) \cdot 10^{-7-6} = 12 \cdot 10^{-13} = 1,2 \cdot 10^{-12}$$

Página 38

10 Efectúa y expresa el resultado en notación científica, sin utilizar la calculadora:

$$a) (3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$$

$$b) (4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$$

$$c) (5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$$

$$d) (5 \cdot 10^9)^2$$

$$e) (4 \cdot 10^5)^{-2}$$

$$f) 3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$$

$$a) (3 \cdot 8) \cdot 10^{-7+18} = 24 \cdot 10^{11} = 2,4 \cdot 10^{12}$$

- b) $(4 \cdot 5) \cdot 10^{-15} = 20 \cdot 10^{-15} = 2 \cdot 10^{-14}$
 c) $\frac{5}{2} \cdot 10^{15} = 2,5 \cdot 10^{15}$
 d) $25 \cdot 10^{18} = 2,5 \cdot 10^{19}$
 e) $4^{-2} \cdot 10^{-10} = \frac{1}{16} \cdot 10^{-10} = 0,0625 \cdot 10^{-10} = 6,25 \cdot 10^{-12}$
 f) $310 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3,12 \cdot 10^{12}$

11 Expresa en notación científica y calcula:

- a) $(0,0073)^2 \cdot (0,0003)^3$ b) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$
 c) $\frac{0,000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0,00302}$ d) $\frac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0,00003 - 0,00015}$

- a) $(7,3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (3 \cdot 10^{-4})^3 = (7,3^2 \cdot 3^3) \cdot 10^{-6-12} =$
 $= 1\,438,83 \cdot 10^{-18} = 1,43883 \cdot 10^{-15}$
 b) $(7,58 \cdot 10^4)^4 : (1,2 \cdot 10^4)^2 = \frac{7,58^4}{1,2^2} \cdot 10^{16-8} =$
 $= 2\,292,52632 \cdot 10^8 \approx 2,3 \cdot 10^{11}$
 c) $\frac{5,41 \cdot 10^{-4} \cdot 1,0318 \cdot 10^7}{1,52 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = \frac{5,582038 \cdot 10^3}{4,5904 \cdot 10^3} \approx 1,2$
 d) $\frac{2,7 \cdot 10^6 - 1,3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{-5} - 1,5 \cdot 10^{-4}} = \frac{(2,7 - 13) \cdot 10^6}{(0,3 - 1,5) \cdot 10^{-4}} = \frac{-10,3 \cdot 10^6}{-1,2 \cdot 10^{-4}} \approx 8,58 \cdot 10^{10}$

12 Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas.

- a) $(4,5 \cdot 10^{12}) \cdot (8,37 \cdot 10^{-4})$ b) $(5,2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3,25 \cdot 10^{-9})$
 c) $(8,4 \cdot 10^{11}) : (3,2 \cdot 10^{-6})$ d) $(7,8 \cdot 10^{-7})^3$

a) $(4,5 \cdot 8,37) \cdot 10^8 = 37,665 \cdot 10^8 = 3,7665 \cdot 10^9$

Con dos cifras significativas será $3,8 \cdot 10^9$ y con tres, $3,77 \cdot 10^9$.

b) $(5,2 \cdot 3,25) \cdot 10^{-13} = 16,9 \cdot 10^{-13} = 1,69 \cdot 10^{-12}$ resultado con tres cifras significativas; con dos cifras será $1,7 \cdot 10^{-12}$.

c) $(8,4 : 3,2) \cdot 10^{17} = 2,625 \cdot 10^{17}$; tomando $2,6 \cdot 10^{17}$ y $2,63 \cdot 10^{17}$, tendremos el resultado con dos y tres cifras significativas, respectivamente.

d) $7,8^3 \cdot 10^{-21} = 474,552 \cdot 10^{-21} = 4,74552 \cdot 10^{-19}$

El resultado con dos cifras significativas será $4,7 \cdot 10^{-19}$, y con tres cifras será $4,75 \cdot 10^{-19}$.

13 Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

$$\text{a) } \frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$$

$$\text{b) } \frac{7,35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3,2 \cdot 10^7$$

$$\text{c) } (4,3 \cdot 10^3 - 7,2 \cdot 10^5)^2$$

$$\text{a) } \frac{(0,3 + 7) \cdot 10^{-4}}{(10 - 5) \cdot 10^5} = \frac{7,3}{5} \cdot 10^{-9} = 1,46 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{b) } \frac{7,35}{5} \cdot 10^7 + 3,2 \cdot 10^7 = 1,47 \cdot 10^7 + 3,2 \cdot 10^7 = 4,67 \cdot 10^7$$

$$\text{c) } (4,3 \cdot 10^3 - 720 \cdot 10^3)^2 = (-715,7 \cdot 10^3)^2 = 512\,226,49 \cdot 10^6 = 5,1222649 \cdot 10^{11} \approx 5,12 \cdot 10^{11}$$

Números reales

14 a) Clasifica los siguientes números racionales o irracionales:

$$\frac{41}{13}; -\sqrt{49}; 53,\widehat{7}; 3,2 \cdot 10^{-10}; \sqrt{12}; \sqrt[3]{5}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

$$\text{a) Racionales: } \frac{41}{13}; -\sqrt{49}; 53,\widehat{7}; 3,2 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{Irracionales: } \sqrt{12}; \sqrt[3]{5}$$

$$\text{b) Entero: } -\sqrt{49} = -7$$

$$\text{c) } -\sqrt{49} < 3,2 \cdot 10^{-10} < \sqrt[3]{5} < \frac{41}{13} < \sqrt{12} < 53,\widehat{7}$$

15 Di cuáles de los siguientes números son irracionales:

$$-\frac{3}{4}; 1,7\widehat{3}; \sqrt{3}; \pi; \sqrt{9}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Son irracionales } \sqrt{3}, \pi \text{ y } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

16 Ordena de menor a mayor:

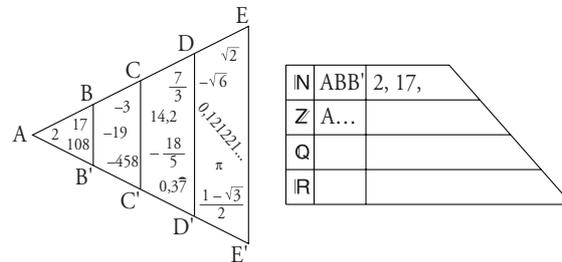
$$\text{a) } 1,45; 1,\widehat{4}; \sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{2}; \sqrt[3]{3}; \frac{13}{9}$$

$$\text{a) } \sqrt{2} < 1,\widehat{4} < 1,45$$

$$\text{b) } \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \frac{13}{9}$$

17 a) Observa el diagrama y completa en tu cuaderno el cuadro adjunto.



b) Sitúa los siguientes números en el lugar que les corresponda en el diagrama y en el cuadro:

$$3,\overline{28}; \frac{14}{7}; \sqrt{8}; -\sqrt{9}$$

c) ¿Cómo se llaman los números de DEE'D'?

a) N: ABB'	2; 17; 108
Z: ACC'	2; 17; 108; -3; -19; -458
Q: ADD'	2; 17; 108; -3; -19; -458; $\frac{7}{3}$; 14,2; $-\frac{18}{5}$; $0,3\overline{7}$
R: AEE'	2; 17; 108; -3; -19; -458; $\frac{7}{3}$; 14,2; $-\frac{18}{5}$; $0,3\overline{7}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$; 0,121221...; π ; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

b) $3,\overline{28} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R} \rightarrow 3,\overline{28} \in CDD'C'$

$$\frac{14}{7} \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \rightarrow \frac{14}{7} \in ABB'$$

$$\sqrt{8} \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{8} \in DEE'D'$$

$$-\sqrt{9} \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \rightarrow -\sqrt{9} \in BCC'B'$$

c) Números irracionales.

18 Clasifica estos números según pertenezcan a los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} .

3	$-3/4$	$\sqrt{2}$	7,23	-2
π	0	-4	$1/3$	$\sqrt[3]{-1}$
$11/9$	$\sqrt{-5}$	2	2,48	18
$1 + \sqrt{2}$	-1	$\sqrt[4]{-5}$	1	1,010203...

$$\mathbb{N} \rightarrow 3; 0; 2; 18; 1$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow 3; 0; 2; 18; 1; -2; -4; -1; \sqrt[3]{-1}$$

$$\mathbb{Q} \rightarrow 3; 0; 2; 18; 1; -2; -4; -1; \sqrt[3]{-1}; -\frac{3}{4}; 7,23; \frac{1}{3}; \frac{11}{9}; 2,48$$

$$\mathbb{R} \rightarrow 3; 0; 2; 18; 1; -2; -4; -1; \sqrt[3]{-1}; -\frac{3}{4}; 7,23; \frac{1}{3}; \frac{11}{9}; 2,48;$$

$$\sqrt{2}; \pi; 1 + \sqrt{2}; 1,010203\dots$$

Página 39

Intervalos

19 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

20 Escribe simbólicamente y representa los siguientes intervalos:

$$A = \{x \mid -6 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{x \mid -4 < x \leq 4\}$$

$$C = \{x \mid 3 \leq x\}$$

$$D = \{x \mid 0 < x < 5\}$$

$$E = \{x \mid x > -2\}$$

$$F = \{x \mid 10 \geq x\}$$

$$A = [-6, 3]$$



$$B = (-4, 4]$$



$$C = [3, +\infty)$$



$$D = (0, 5)$$



$$E = (-2, +\infty)$$



$$F = (-\infty, 10]$$



21 Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:

a) $0 < x < 1$

b) $x \leq -3$

c) $x > 0$

d) $-5 \leq x \leq 5$

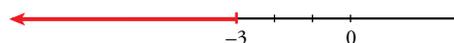
e) $-5 < x$

f) $1 \leq x < 3$

a) $(0, 1)$



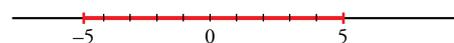
b) $(-\infty, -3]$



c) $(0, +\infty)$



d) $[-5, 5]$



e) $(-5, +\infty)$



f) $[1, 3)$



22 Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:

$$P = (1; 2,5)$$

$$Q = [-2, 3]$$

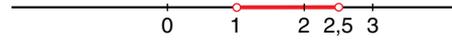
$$R = [-7, 0]$$

$$S = [-3, +\infty)$$

$$T = (2, +\infty)$$

$$I = (-5, 2]$$

$$P = \{x / 1 < x < 2,5\}$$



$$Q = \{x / -2 \leq x \leq 3\}$$



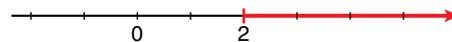
$$R = \{x / -7 \leq x \leq 0\}$$



$$S = \{x / -3 \leq x\}$$



$$T = \{x / x > 2\}$$



$$I = \{x / -5 < x \leq 2\}$$



Potencias y raíces

23 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

24 Expresa como potencia única:

a) $\sqrt{3} \sqrt[3]{3}$

b) $2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

f) $a \sqrt{\frac{1}{a}}$

a) $\sqrt{3} \sqrt[3]{3} = 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} = 3^{5/6}$

b) $2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} = 2 \frac{1}{2^{2/3}} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{8^{1/2}}{4^{1/3}} = \frac{2^{3/2}}{2^{2/3}} = 2^{5/6}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \frac{a^{8/3}}{a^2} = a^{2/3}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a^{2/3}} = a^{-2/3}$

f) $a \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^{1/2}} = a^{-1/2}$

25 Obtén con la calculadora:

a) $\sqrt[5]{9,5^2}$

b) $\sqrt[3]{-173}$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^3}$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}}$

e) $28^{3/4}$

f) $8^{-1/3}$

g) $0,03^{-3/2}$

h) $(\sqrt[5]{0,0025})^{-1}$

a) $\sqrt[5]{9,5^2} = 9,5^{2/5} \approx 2,46$

b) $\sqrt[3]{-173} \approx -5,57$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^3} = \left(\frac{14}{9}\right)^{3/4} \approx 1,39$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}} = 5^{-9/4} \approx 0,027$

e) $28^{3/4} \approx 12,17$

f) $8^{-1/3} = 0,5$

g) $0,03^{-3/2} \approx 192,45$

h) $(\sqrt[5]{0,0025})^{-1} = (0,0025)^{-1/5} \approx 3,31$

26 Expresa en forma exponencial:

a) $\sqrt[3]{x^2}$

b) $(\sqrt[5]{a^2})^3$

c) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

e) $(\sqrt{a})^{-3}$

f) $\sqrt[6]{a^3}$

g) $(\sqrt[4]{a^2})^2$

h) $\sqrt[5]{a^{10}}$

a) $x^{2/3}$

b) $(a^{2/5})^3 = a^{6/5}$

c) $\sqrt[8]{a^7} = a^{7/8}$

d) $\sqrt[12]{x} = x^{1/12}$

e) $(a^{1/2})^{-3} = a^{-3/2}$

f) $a^{3/6} = a^{1/2}$

g) $(a^{2/4})^2 = a$

h) $a^{10/5} = a^2$

27 Expresa como una raíz:

a) $15^{1/2}$

b) $(a^2)^{1/3}$

c) $(x^{-1})^{5/4}$

d) $(a^{1/5})^{-4}$

e) $(a^{2/3})^{1/2}$

f) $a^2 \cdot a^{1/2}$

g) $(3^{-2/5})^{10/3}$

a) $\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[4]{x^{-5}}$

d) $\sqrt[5]{a^{-4}}$

e) $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

f) $a^{2+1/2} = a^{5/2} = \sqrt{a^5}$

g) $3^{(-2/5) \cdot (10/3)} = 3^{-4/3} = \sqrt[3]{3^{-4}}$

28 Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4}$

b) $\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$

c) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$

d) $\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt[4]{2}$

e) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{a}}$

$$a) \frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4} = \frac{a^{7/3}}{a^4} = a^{-5/3}$$

$$b) \sqrt[4]{\frac{1}{a}} = \sqrt[4]{a^{-1}} = a^{-1/4}$$

$$c) \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5^{3/2}}{5^{2/3}} = 5^{5/6}$$

$$d) \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt[4]{2} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{2^2 \cdot 2} = \frac{1}{2} 2^{3/4} = \frac{2^{3/4}}{2} = 2^{-1/4}$$

$$e) \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a \sqrt{a}} = \frac{a^{2/3}}{a \cdot a^{1/2}} = \frac{a^{2/3}}{a^{3/2}} = a^{-5/6}$$

$$f) \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{a}} = \frac{a^{2/3} \cdot a^3}{a^2 \cdot a^{1/2}} = \frac{a^{11/3}}{a^{5/2}} = a^{7/6}$$

Radicales

29 Multiplica y simplifica el resultado:

$$a) \sqrt{2a} \sqrt{3a} \sqrt{6a}$$

$$b) \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b^4} \sqrt[3]{b^2}$$

$$c) \sqrt{5a} \sqrt{10ab} \sqrt{8a^3b} \sqrt{a}$$

$$a) \sqrt{2a} \sqrt{3a} \sqrt{6a} = \sqrt{36a^3} = 6a\sqrt{a}$$

$$b) \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b^4} \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^3 b^6} = ab^2$$

$$c) \sqrt{5a} \sqrt{10ab} \sqrt{8a^3b} \sqrt{a} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 8 \cdot a^6 b^2} = \\ = \sqrt{5^2 \cdot 2^4 \cdot a^6 b^2} = 5 \cdot 4 \cdot a^3 b = 20a^3 b$$

30 Simplifica los siguientes radicales:

$$a) \sqrt[6]{5^3}$$

$$b) \sqrt[15]{2^{12}}$$

$$c) \sqrt[10]{a^8}$$

$$d) \sqrt[12]{a^4 \cdot b^8}$$

$$e) \sqrt[8]{(x^2 y^2)^2}$$

$$d) \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$$

$$a) \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$$

$$b) \sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^4}$$

$$c) \sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4}$$

$$d) \sqrt[12]{a^4 b^8} = \sqrt[3]{a \cdot b^2}$$

$$e) \sqrt[8]{(x^2 \cdot y^2)^2} = \sqrt[4]{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x \cdot y}$$

$$f) \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 x^7}} = \sqrt[12]{x^5 x^7} = \sqrt[12]{x^{12}} = x$$

31 Extrae factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{16x^6}$

b) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$

c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$

d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$

e) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$

f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

a) $\sqrt[3]{16x^6} = \sqrt[3]{2^4x^6} = 2\sqrt{2} \cdot x^2$

b) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7x^5}{5^2 \cdot 3y^3}} = \frac{2x^2}{5y} \cdot \sqrt{\frac{7x}{3y}}$

c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10} = \sqrt[4]{2^{10}} = 2^2\sqrt[4]{2^2} = 4\sqrt{2}$

d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}} = \sqrt{\frac{2^3a^5}{b^4}} = \frac{2a^2}{b^2} \cdot \sqrt{2a}$

e) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}} = \sqrt[4]{\frac{5^2a^2b}{c^6}} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt[4]{\frac{5^2a^2b}{c^2}} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt[4]{25a^2b}$

f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}} = \sqrt{\frac{2^5 \cdot a^3}{3^2 \cdot 5 \cdot b^4}} = \frac{2^2a}{3b^2} \sqrt{\frac{2a}{5}} = \frac{4a}{3b^2} \sqrt{\frac{2a}{5}}$

32 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}$

b) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5}$

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6} \rightarrow \sqrt[60]{2^{30}}, \sqrt[60]{3^{20}}, \sqrt[60]{4^{15}}, \sqrt[60]{5^{12}}, \sqrt[60]{6^{10}}$

Se observa que $2^{30} = 4^{15} \rightarrow \sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$

Comparamos los radicandos $\rightarrow 6^{10} < 5^{12} < 2^{30} < 3^{20}$

Luego, $\sqrt[6]{6} < \sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$.

b) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5} \rightarrow \sqrt[12]{2^{16}}, \sqrt[12]{5^9}, \sqrt[12]{3^{10}}$

Comparamos los radicandos $\rightarrow 3^{10} < 2^{16} < 5^9$

Luego, $\sqrt[6]{3^5} < \sqrt[3]{2^4} < \sqrt[4]{5^3}$.

Página 40**33** Introduce dentro de la raíz y simplifica:

a) $2\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$

c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

$$a) 2 \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{2}} = \sqrt{6}$$

$$b) 3 \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{3}} = \sqrt{6}$$

$$c) 2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{4}} = \sqrt[3]{2}$$

$$d) 2 \sqrt[4]{\frac{5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{2^2 \cdot 5}{3}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$$

$$e) \frac{1}{2} \sqrt{12} = \sqrt{\frac{12}{2^2}} = \sqrt{3}$$

$$f) \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

34 Divide y simplifica el resultado:

$$a) \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$$

$$c) \sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}$$

$$e) \sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f) \frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$$

$$a) \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$b) \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

$$c) \sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}} = \sqrt[4]{\frac{5}{12} : \frac{20}{3}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 20}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt[4]{\frac{a}{ab}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b}}$$

$$e) \sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2} : \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3^2}{2^2}} = \frac{3}{2}$$

$$f) \frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}} = \frac{\sqrt[12]{20^2}}{\sqrt[12]{10^3}} = \sqrt[12]{\frac{400}{1000}} = \sqrt[12]{\frac{4}{10}}$$

35 (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

36 Suma:

a) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48}$

a) $\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{3} = \left(1 + \frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

b) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 4\sqrt{2} + 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} - 7 \cdot 3\sqrt{2} =$
 $= (4 + 24 - 21)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$
 $= (3 + 8 - 4 + 5)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48} = 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 40\sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$
 $= (10 + 3 - 40 + 4)\sqrt{3} = -23\sqrt{3}$

37 Efectúa:

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}}$

d) $\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}}$

e) $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$

f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

a) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500} = \sqrt{2^6 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} - \sqrt{2^2 \cdot 5^3} =$
 $= 2^3 \cdot \sqrt{5} + 2^2 \cdot \sqrt{5} - 10\sqrt{5} =$
 $= 8\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 10\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{1}{8}\sqrt{7} + \frac{1}{2}\sqrt{7} = \frac{5}{8}\sqrt{7}$

d) $\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{3} = \frac{3}{2}\sqrt[5]{3}$

e) $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24} = \sqrt{5^2 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 3^3} - \sqrt{2^3 \cdot 3} =$
 $= 5\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5}{2^3}} - \sqrt[3]{\frac{5}{2^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

38 Racionaliza y simplifica:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \text{b) } \frac{4}{\sqrt{6}} \qquad \text{c) } \frac{6}{\sqrt{12}} \qquad \text{d) } \frac{3}{\sqrt{15}}$$

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \qquad \text{b) } \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{c) } \frac{6}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \qquad \text{d) } \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

39 Racionaliza: a) $\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

a) Multiplicamos el numerador y denominador por $\sqrt{3}$.

$$\frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{6})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$$

b) Multiplicamos numerador y denominador por $3\sqrt{3} - 2$.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2} &= \frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{(3\sqrt{3})^2 - 2^2} = \\ &= \frac{9\sqrt{18} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} = \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

40 Racionaliza:

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \qquad \text{b) } \frac{1}{\sqrt[8]{a^5}} \qquad \text{c) } \frac{8}{\sqrt{5} - 1} \qquad \text{d) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[8]{a^5}} = \frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5}\sqrt[8]{a^3}} = \frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^8}} = \frac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{8}{\sqrt{5} - 1} &= \frac{8(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{8(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5^2} - 1^2} = \frac{8(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \\ &= \frac{8(\sqrt{5} + 1)}{4} = 2(\sqrt{5} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6} - 3}{2 - 3} = 3 - \sqrt{6}$$

41 Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2}{1 + \sqrt{2}}$

b) $\frac{14}{3 - \sqrt{2}}$

c) $\frac{23}{5 - \sqrt{2}}$

d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

f) $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$

g) $\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$

i) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

$$a) \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{-1} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$b) \frac{4}{3 - \sqrt{2}} = \frac{4(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{4(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = 2(3 + \sqrt{2})$$

$$c) \frac{23}{5 - \sqrt{2}} = \frac{23(5 + \sqrt{2})}{(5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})} = \frac{23(5 + \sqrt{2})}{25 - 2} = 5 + \sqrt{2}$$

$$d) \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 + 3 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$e) \frac{11}{2\sqrt{5} + 3} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{20 - 9} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{11} = 2\sqrt{5} - 3$$

$$f) \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})} = \frac{3 + 8 + 4\sqrt{6}}{3 - 8} =$$

$$= \frac{11 + 4\sqrt{6}}{-5} = -\frac{11 + 4\sqrt{6}}{5}$$

$$g) \frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{10(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{10(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{12 - 2} =$$

$$= \frac{10(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{10} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$h) \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3)}{(2\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 3)} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{8 - 9} = 3\sqrt{2} - 4$$

$$i) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{5 + 3 - 2\sqrt{15}}{5 - 3} = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15}$$

PIENSA Y RESUELVE

- 42 La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5,98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilos.

$$M_{\text{Sol}} = 330\,000 \cdot 5,98 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5,98 \cdot 10^{25} = 1,9734 \cdot 10^{27} \text{ t}$$

$$M_{\text{Sol}} = 1,9734 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

- 43 El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena?

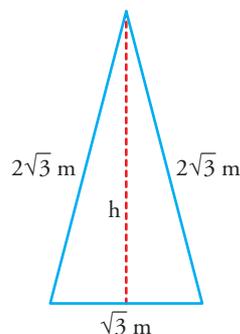
1 t tiene 10^6 g; por tanto, 138 t tendrán $1,38 \cdot 10^8$ g.

Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita:

$$\frac{1,38 \cdot 10^8}{10^{-18}} = 1,38 \cdot 10^{26} \text{ virus para conseguir su peso.}$$

Página 41

- 44 Los lados iguales de un triángulo isósceles miden el doble que la base, cuya longitud es $\sqrt{3}$ m. Calcula el perímetro del triángulo, su altura y su área. Expresa el resultado con radicales.



$$P = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

$$h = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 3 - \frac{3}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3/2 \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ m}^2$$

- 45 En un cubo cuya arista mide $\sqrt{3}$ cm, halla:

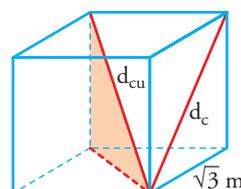
- La diagonal de una cara.
- La diagonal del cubo.
- El volumen del cubo.

Expresa los resultados en forma radical.

a) $d_c = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6} \text{ cm}$

b) $d_{cu} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$

c) $V = \sqrt{3}^3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^3$



46 Reduce a un solo radical:

$$\text{a) } \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} \qquad \text{b) } \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} \qquad \text{c) } \frac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\text{a) } \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^{11}}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^9} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[12]{a^{19}} = a \sqrt[12]{a^7}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[4]{3} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt[8]{2^3}}{\sqrt[8]{3^2} \sqrt[8]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[8]{3^2 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt[8]{18}}$$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

47 ¿Cuáles de las siguientes raíces no existen?

$$\sqrt[3]{-20}, \sqrt[6]{0,12}, \sqrt{-1}, \sqrt[5]{241}, \sqrt[4]{-16}$$

No existe $\sqrt{-1}$ ni $\sqrt[4]{-16}$, por ser par el índice de la raíz y negativo el radicando.

48 Escribe un número racional y otro irracional comprendidos entre los números dados:

$$\text{a) } 3,\overline{7} \text{ y } 3,78 \qquad \text{b) } \frac{71}{50} \text{ y } \frac{64}{45} \qquad \text{c) } \sqrt{2} \text{ y } \sqrt{3} \qquad \text{d) } \sqrt[3]{2} \text{ y } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{a) Racional} \rightarrow 3,778$$

$$\text{Irracional} \rightarrow 3,778777877778\dots$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \frac{71}{50} = 1,42 \\ \frac{64}{45} = 1,4\overline{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Racional} \rightarrow 1,421 \\ \text{Irracional} \rightarrow 1,421442144421\dots \end{array}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \sqrt{2} = 1,414213562\dots \\ \sqrt{3} = 1,732050808\dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Racional} \rightarrow 1,5 \\ \text{Irracional} \rightarrow 1,5151151115111\dots \end{array}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{2} = 1,25992105\dots \\ \sqrt[4]{3} = 1,31607401\dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Racional} \rightarrow 1,26 \\ \text{Irracional} \rightarrow 1,2616116111\dots \end{array}$$

49 ¿Cuántos números racionales hay entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$? Pon ejemplos y razona tu respuesta.

Entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$ hay infinitos números racionales. Basta con introducir nueves entre la parte entera y el primer decimal de $0,\widehat{8}$. Por ejemplo, $0,98$ está entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$.

Lo mismo ocurre con $0,99\widehat{8}$; $0,999\widehat{8}$; $0,9999\widehat{8}$, y así, sucesivamente, vemos que podemos incluir infinitos números racionales entre $0,\widehat{8}$ y $0,\widehat{9}$.

- 50** Escribe dos números racionales, uno mayor que $\sqrt{2}$ y otro menor que $\sqrt{2}$, que se diferencien de él en menos de una milésima.

$$\sqrt{2} = 1,414213562\dots$$

— El número menor que $\sqrt{2}$ puede ser: $x = 1,413313562$.

$$\text{Si hacemos la resta } \sqrt{2} - x = 0,0009 < 0,001.$$

— El número mayor que $\sqrt{2}$ puede ser: $y = 1,415213562$.

$$\text{Si hacemos la resta, } y - \sqrt{2} = 0,0009 < 0,001.$$

- 51** Justifica si, en cada caso, los dos radicales son iguales o distintos:

a) $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[8]{16}$ b) $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[6]{9}$ y $\sqrt[12]{16}$ d) $\sqrt[4]{25}$ y $\sqrt[6]{125}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \\ \sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{son iguales.}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{27} = 3 \text{ y } \sqrt[5]{32} = 2 \rightarrow \text{no son iguales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[12]{16} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{son distintos.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d) } \sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} \\ \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5} \end{array} \right\} \rightarrow \text{son iguales.}$$

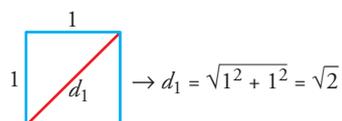
- 52** Explica un procedimiento para construir un segmento que mida exactamente $\sqrt{7}$ cm.

Con un rectángulo 2×1 construimos $\sqrt{5}$ (su diagonal).

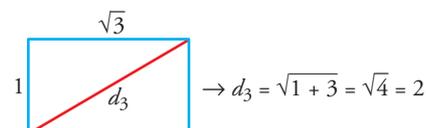
Con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{5}$ y 1 construimos $\sqrt{6}$ (su diagonal).

Con un rectángulo de dimensiones $\sqrt{6}$ y 1 construimos $\sqrt{7}$ (su diagonal).

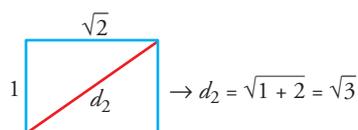
- 53** Calcula el valor de la diagonal en cada caso:



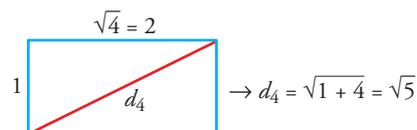
$$\rightarrow d_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



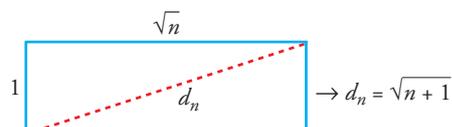
$$\rightarrow d_3 = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$



$$\rightarrow d_2 = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$



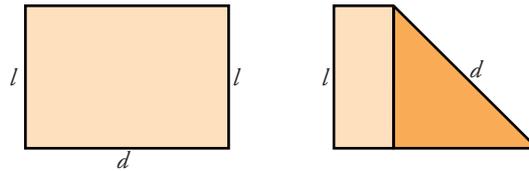
$$\rightarrow d_4 = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$



$$\rightarrow d_n = \sqrt{n + 1}$$

PROFUNDIZA

- 54** Dobra una hoja DIN A-4 formando un cuadrado y expresa la diagonal de ese cuadrado en función del lado menor, l . Comprueba, con otra hoja igual, que el lado mayor mide lo mismo que la diagonal del cuadrado. ¿Cuál es la razón entre las dimensiones de la hoja DIN A-4?



Expresamos d en función de l : $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

Por tanto, la razón, R , entre las dimensiones de la hoja DIN A-4 es:

$$\frac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2} \rightarrow R = \sqrt{2}$$

- 55** Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$ c) $\frac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}$ d) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

a) $\frac{2 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{(2 - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2} - 2}{2} = \sqrt[3]{4} - 1$

b) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2} = \frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} = \frac{9\sqrt{18} + 6\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} =$
 $= \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

c) $\frac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}} = \frac{(4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}) \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{5} + \sqrt{7})} =$
 $= \frac{8\sqrt{75} - 4\sqrt{105} + 4\sqrt{105} - 2\sqrt{147}}{20 - 7} =$
 $= \frac{8\sqrt{5^2 \cdot 3} - 2\sqrt{7^2 \cdot 3}}{13} = \frac{40\sqrt{3} - 14\sqrt{3}}{13} = \frac{26\sqrt{3}}{13} = 2\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - x^2 + 1} = x - \sqrt{x^2 - 1}$

56 Efectúa y simplifica:

$$\text{a) } \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right) (3 + 2\sqrt{2}) \qquad \text{b) } \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5}$$

$$\text{c) } \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right) : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \right)$$

a) Comenzamos por racionalizar $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$:

$$\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})} = \frac{6 + 3 - 2\sqrt{18}}{6 + 3} = \frac{9 - 6\sqrt{2}}{3} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Así:

$$\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$$

b) Racionalizamos la expresión $\frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1}$:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{5} + 1)^2 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} &= \frac{(5 + 1 + 2\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{(6 + 2\sqrt{5})(\sqrt{5} + 1)}{4} = \\ &= \frac{6\sqrt{5} + 10 + 6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{16 + 8\sqrt{5}}{4} = 4 + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Así:

$$\frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 4 - \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right) : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \right) &= \left(\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right) : \left(\frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{3}} : \frac{1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3}}{1 - 3} = \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

57 ¿Para qué valores de x se pueden calcular las siguientes raíces?

a) $\sqrt{x - 2}$ b) $\sqrt{-x}$ c) $\sqrt[4]{8 - x}$ d) $\sqrt{x^2 + 1}$

a) Para $x \geq 2$ b) $x \leq 0$ c) $x \leq 8$ d) \mathbb{R}

58 Si sabes que $a > 1$, ¿cómo ordenarías los siguientes números de menor a mayor?

$$a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}, -\frac{1}{a+1}$$

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{a+1} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a} < a$$