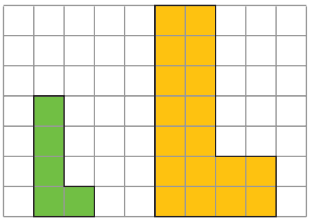
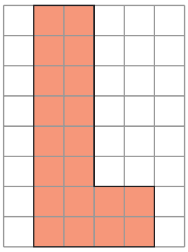
Página 170

PRACTICA

Semejanza de figuras

1 **Copia en una hoja de papel cuadriculado estas dos figuras. Modifica la de la derecha para que sean semejantes.**





2 **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

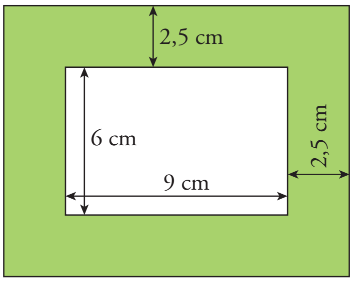
b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) Como la escala es 1:1 500 000, cada centímetro en el mapa corresponde a 1 500 000 cm en la realidad, que equivalen a 15 km.

2,5 cm en el mapa serán: $2{,}5 \cdot 15 = 37{,}5$ km en la realidad.

b) $\dfrac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24$ cm

3 **Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**

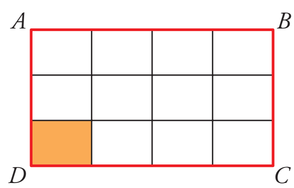


El rectángulo exterior es de 14 cm de ancho y 11 cm de alto.

Para que los rectángulos sean semejantes, los lados correspondientes han de ser proporcionales: $\dfrac{6}{11} \neq \dfrac{9}{14}$.

Ambos rectángulos no son proporcionales.

4 **Hemos dividido en cuatro partes iguales el lado mayor del rectángulo *ABCD* y en tres partes iguales el lado menor.**



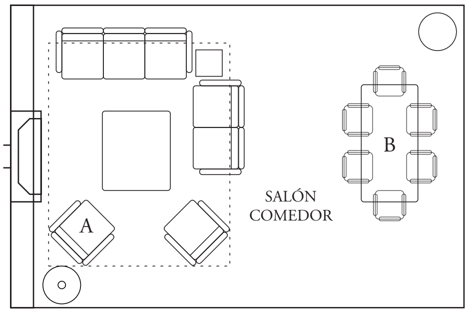
a) ¿Es semejante cada uno de los doce rectángulos obtenidos con el inicial?

b) Si dividimos los dos lados en tres partes iguales, ¿obtendríamos rectángulos semejantes?

a) No, porque los lados mayores están en la relación 1/4, y los menores, en 1/3.

b) En este caso sí. La razón de semejanza es 1/3.

5 **En una oficina de venta de pisos han hecho este plano a escala 1/50.**



a) Calcula las dimensiones reales del salón y su área.

b) Halla las dimensiones de la mesa B y del sillón A. ¿Te parecen razonables?

a) Cada centímetro del plano equivale a 0,5 m en la realidad.

Dimensiones del salón: $(6 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (4 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$

Área del salón: 6 m^2

b) Mesa: $(0{,}75 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (1{,}55 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 0{,}375 \text{ m} \times 0{,}775 \text{ m}$

Podemos considerar (por errores de medición) que la mesa mide:

$0{,}4 \text{ m} \times 0{,}8 \text{ m}$, es decir, $40 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$.

Sillón A: $(0{,}7 \cdot 0{,}5 \text{ m}) \times (0{,}65 \cdot 0{,}5 \text{ m}) = 0{,}35 \text{ m} \times 0{,}325 \text{ m} =$

$= 35 \text{ cm} \times 32{,}5 \text{ cm}$

Las medidas no son razonables en absoluto: un salón de 6 m^2 es una estancia algo pequeña.

Teorema de Tales

6 **Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes y su razón de semejanza es 2/3. Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ si sabemos que**

$$\overline{AB} = 12 \text{ m}, \quad \overline{BC} = 9 \text{ m} \quad \text{y} \quad \overline{AC} = 7{,}5 \text{ m}$$

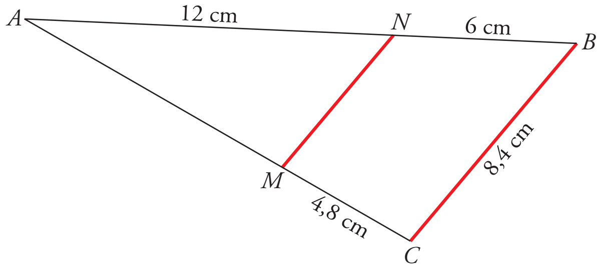
Si son semejantes se cumple que:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{12} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8 \text{ m}; \quad \frac{\overline{B'C'}}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{B'C'} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{A'C'}}{7{,}5} = \frac{2}{3} \rightarrow \overline{A'C'} = \frac{7{,}5 \cdot 2}{3} = 5 \text{ m}$$

7 **En la figura, MN es paralelo a BC. Calcula $\overline{AM}$ y $\overline{MN}$.**



Los triángulos ANM y ABC están en posición de Tales.

Tenemos, pues, las siguientes igualdades: $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} \rightarrow \frac{8,4}{\overline{MN}} = \frac{12+6}{12} \rightarrow \overline{MN} = \frac{8,4 \cdot 12}{18} = 5,6 \rightarrow \overline{MN} = 5,6 \text{ cm}$$

Llamamos $x = \overline{AM}$:

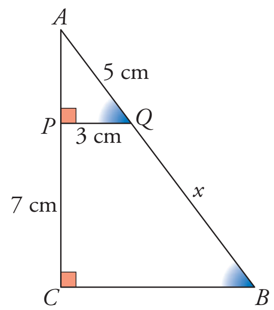
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} \rightarrow \frac{8,4}{4,8+x} = \frac{5,6}{x} \rightarrow 8,4x = 5,6(4,8+x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 8,4x - 5,6x = 26,88 \rightarrow x = \frac{26,88}{2,8} = 9,6$$

Luego $\overline{AM} = 9,6$ cm.

8 **a) ¿Por qué son semejantes los triángulos APQ y ACB?**

b) Calcula $x = \overline{BQ}$.



a) El ángulo $\hat{A}$ es común a los dos triángulos y los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{C}$ son rectos, luego los ángulos $\hat{Q}$ y $\hat{B}$ son iguales. Por lo tanto, ambos triángulos son semejantes.

b) Por ser triángulos semejantes: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$

Calculamos $\overline{AP}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

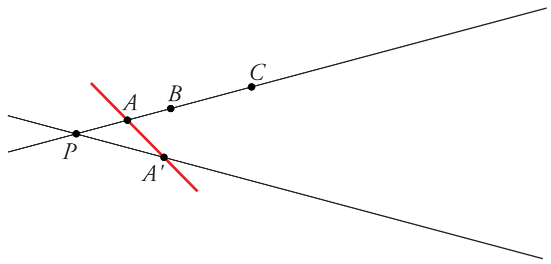
$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = 4 + 7 \rightarrow \overline{AC} = 11 \text{ cm}$$

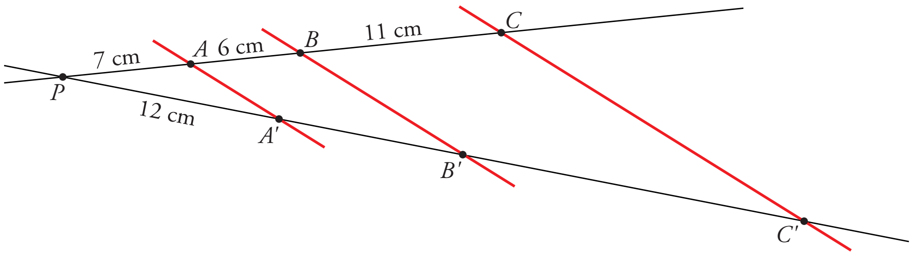
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}} \rightarrow \frac{11}{4} = \frac{5+x}{5} \rightarrow 55 = 20 + 4x \rightarrow x = \frac{35}{4} = 8,75$$

$x = 8,75$ cm

9 **Sabemos que:** $\overline{PA} = 7$ **cm,** $\overline{PB} = 13$ **cm,** $\overline{PC} = 24$ **cm y** $\overline{PA'} = 12$ **cm.**



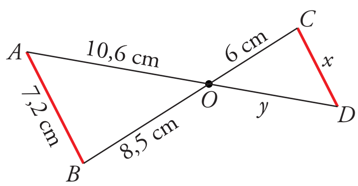
Traza paralelas a AA' **desde** B **y desde** C **y calcula** $\overline{A'B'}$ **y** $\overline{B'C'}$**.**



$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{7}{6} = \frac{12}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = \frac{6 \cdot 12}{7} = 10{,}28 \rightarrow \overline{A'B'} = 10{,}28 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \overline{B'C'} = \frac{10{,}28 \cdot 11}{6} = 10{,}85 \rightarrow \overline{B'C'} = 18{,}85 \text{ cm}$$

10 **Observa esta figura, en la que el segmento** AB **es paralelo a** CD**.**



a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB **y** ODC**.**

b) Calcula x **e** y**.**

a) Como $AB // CD$: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{O}$ es común $(\hat{O}' = \hat{O}'')$.

Los ángulos de ambos triángulos son iguales, luego los dos triángulos son semejantes.

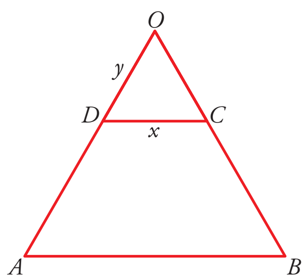
b) Ponemos los triángulos en posición de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \rightarrow \frac{7{,}2}{8{,}5} = \frac{x}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{7{,}2 \cdot 6}{8{,}5} = 5{,}08 \text{ cm}$$

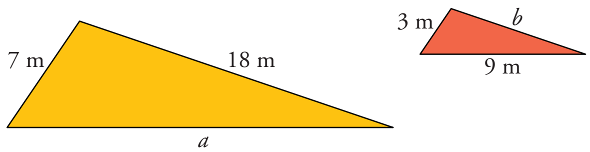
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OD}} \rightarrow \frac{7{,}2}{10{,}6} = \frac{5{,}08}{y} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{5{,}08 \cdot 10{,}6}{7{,}2} = 7{,}48 \text{ cm}$$



Página 171

11 Estos dos triángulos tienen sus lados paralelos. ¿Cuánto miden los lados *a* y *b*?



Como los lados respectivos son paralelos:

$$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'$$

y los triángulos son semejantes.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \to \frac{a}{7} = \frac{9}{3} \to a = \frac{9 \cdot 7}{3} = 21 \text{ m} \to a = 21 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} \to \frac{21}{18} = \frac{9}{b} \to b = \frac{18 \cdot 9}{21} = 7{,}71 \text{ m} \to b = 7{,}71 \text{ m}$$

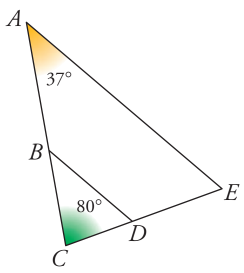
12 En un triángulo *ABC,* la base *AB* mide 5,7 m y la altura relativa a esa base mide 9,5 m. ¿Cuánto mide el área de otro triángulo semejante a *ABC* en el que $\overline{A'B'}$ = 4,14 m?

Como son semejantes: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{h}{h'} \to \frac{5{,}7}{4{,}14} = \frac{9{,}5}{h'} \to h' = \frac{9{,}5 \cdot 4{,}14}{5{,}7} = 6{,}9$ m

La altura mide 6,9 m.

Por tanto, el área pedida es: $A = \frac{6{,}9 \cdot 4{,}14}{2} = 14{,}283 \text{ m}^2$

13 Si *BD* es paralelo a *AE,* y $\overline{AC}$ = 15 cm, $\overline{CE}$ = 11 cm, $\overline{BD}$ = 6,4 cm:



a) Calcula $\overline{CD}$.

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ sin medirlo directamente?

c) Si $\hat{A}$ = 37° y $\hat{C}$ = 80°, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.

Los triángulos $\widehat{ACE}$ y $\widehat{BCD}$ son semejantes, luego:

a) $\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \to \frac{11}{15} = \frac{\overline{BD}}{6{,}4} \to \overline{CD} = \frac{11 \cdot 6{,}4}{15} = 4{,}7$ cm

b) No se puede.

c) $\hat{A} = 37°$, $\hat{C} = 80°$

$\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

14 **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2. ¿Cuál es el área del segundo?**

Si la razón de semejanza entre dos triángulos es k, la razón entre sus áreas es k^2.

$$\text{Razón entre áreas} = \left(\frac{13{,}6}{8}\right)^2 = (1{,}7)^2 = 2{,}89$$

$$A_{\text{primero}} = 26 \text{ cm}^2 \rightarrow \frac{A'}{26} = 2{,}89 \rightarrow A' = 2{,}89 \cdot 26 = 75{,}14 \text{ cm}^2$$

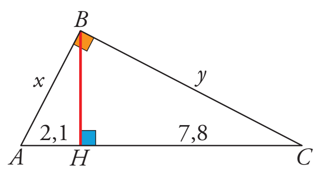
El área del segundo triángulo mide 75,14 cm^2.

15 **Di cuál es la relación entre los radios de dos círculos si la razón entre sus áreas es 16/9.**

$$\frac{A}{A'} = \frac{16}{9} \rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

Teoremas del cateto y de la altura

16 **En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura BH sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos x e y.**



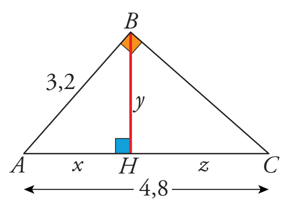
a) Por el teorema del cateto:

$$y^2 = \overline{AC} \cdot \overline{HC} \rightarrow y^2 = (2{,}1 + 7{,}8) \cdot 7{,}8 =$$

$$= 77{,}22 \rightarrow y = \sqrt{77{,}22} \approx 8{,}79$$

$$x^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AH} \rightarrow x^2 = (2{,}1 + 7{,}8) \cdot 2{,}1 =$$

$$= 20{,}79 \rightarrow x = \sqrt{20{,}79} \approx 4{,}56$$



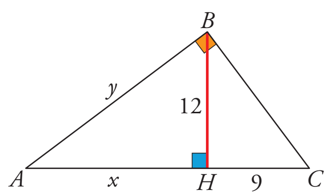
b) Por el teorema del cateto:

$$3{,}2^2 = 4{,}8 \cdot x \rightarrow x = \frac{3{,}2^2}{4{,}8} = 2{,}13 \rightarrow x \approx 2{,}13$$

$$z = 4{,}8 - 2{,}13 = 2{,}67$$

Por el teorema de la altura:

$$y^2 = x \cdot z \rightarrow y = \sqrt{2{,}13 \cdot 2{,}67} \approx \sqrt{5{,}68} \rightarrow y \approx 2{,}38$$



c) Por el teorema de la altura:

$$12^2 = x \cdot 9 \rightarrow x = \frac{144}{9} = 16 \rightarrow x = 16$$

Por el teorema del cateto:

$$y^2 = (x + 9) \cdot x = x^2 + 9x = 256 + 144 = 400 \rightarrow y = 20$$

Rectas

17 Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$

b) $y = 3 - 2(x - 1) \rightarrow -2x + 5$

c) $y = -1$

18 Da un vector dirección y la pendiente de la recta que pasa por A y B en los siguientes casos:

a) $A(-1, 0)$ $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$ $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$ $B(4, -1)$

a) $A(-1, 0)$ y $B(0, 3)$

Un vector dirección es $\overrightarrow{AB} = (0, 3) - (-1, 0) = (1, 3)$.

La pendiente es $m = \frac{3}{1} = 3$.

b) $A(0, -2)$ y $B(5, -2)$

Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (5, -2) - (0, -2) = (5, 0)$

Pendiente: $m = 0$

c) $A(-2, 3)$ y $B(4, -1)$

Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (4, -1) - (-2, 3) = (6, -4)$

Pendiente: $m = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

19 Halla la ecuación de cada una de las rectas del ejercicio anterior. Esríbela en forma general.

a) $m = 3$ y pasa por $A(-1, 0) \rightarrow y = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 3$

b) $m = 0$ y pasa por $A(0, -2) \rightarrow y = -2$

c) $m = -\frac{2}{3}$ y pasa por $A(-2, 3) \rightarrow y = 3 - \frac{2}{3}(x + 2) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

20 **Escribe la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Pasa por (–4, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por (1, 3) y su pendiente es –2.

c) Pasa por (5, –1) y su pendiente es 0.

a) La ecuación será: $y = 2 + \frac{1}{2}(x + 4) \rightarrow 2y = 4 + x + 4 \rightarrow 2y - x - 8 = 0$

b) La ecuación será: $y = 3 - 2(x - 1) \rightarrow y = 3 - 2x + 2 \rightarrow y + 2x - 5 = 0$

c) Ecuación: $y = -1$

21 **Halla la ecuación de las siguientes rectas:**

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por (4, 5).

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por (4, 0).

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por (0, –3).

a) Pendiente de la recta $y = -2x + 3 \rightarrow m = -2$

Ecuación: $y = 5 - 2(x - 4) \rightarrow y = -12x + 13 \rightarrow y + 2x - 13 = 0$

b) Pendiente de la recta $2x - 4y + 3 = 0$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \rightarrow m = \frac{1}{2}$

Ecuación: $y = \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow 2y = x - 4 \rightarrow x - 2y - 4 = 0$

c) Pendiente de la recta $3x + 2y - 6 = 0$: $y = -\frac{3}{2}x + 3 \rightarrow m = -\frac{3}{2}$

Ecuación: $y = -3 - \frac{3}{2}x \rightarrow 2y = -6 - 3x \rightarrow 3x + 2y + 6 = 0$

22 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al vector $\vec{v}$, en los siguientes casos:**

a) $P(-7, 2)$ $\vec{v}(2, 1)$ b) $P(4, -3)$ $\vec{v}(-5, 4)$ c) $P(5, 1)$ $\vec{v}(-1, -3)$

a) Un vector perpendicular a $\vec{v}(2, 1)$ es (–1, 2), vector dirección de la recta pedida $\rightarrow m = -2$

Ecuación: $y = 2 - 2(x + 7) \rightarrow y = -2x - 12 \rightarrow 2x + y + 12 = 0$

b) Un vector perpendicular a $\vec{v}(-5, 4)$ es (4, 5), vector dirección de la recta pedida $\rightarrow m = \frac{5}{4}$

Ecuación: $y = -3 + \frac{5}{4}(x - 4) \rightarrow 4y = -12 + 5x - 20 \rightarrow 5x - 4y - 32 = 0$

c) Un vector dirección de la recta pedida es $(-3, 1)$, perpendicular a $\vec{v}(-1, -3)$

$\rightarrow \ m = -\frac{1}{3}$

Ecuación: $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 5) \ \rightarrow \ 3y = 3 - x + 5 \ \rightarrow \ x + 3y - 8 = 0$

23 **Calcula la pendiente y un vector dirección de una recta perpendicular a la que pasa por $A(3, 1)$ y $B(-5, -1)$.**

- Vector dirección de la recta que pasa por $A(3, 1)$ y $B(-5, -1)$:
  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-5, -1) - (3, 1) = (-8, -2)$
- Vector perpendicular a $\vec{v}$ es $(1, -4)$, vector dirección de la recta perpendicular a la que pasa por A y B.
- Pendiente $\rightarrow \ m = -4$

24 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(-3, 0)$ y es perpendicular a $3x - y + 6 = 0$.**

- Pendiente de la recta $3x - y + 6 = 0 \ \rightarrow \ m = 3$
- Pendiente de la recta perpendicular a $3x - y + 6 = 0$ es $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$.
- Ecuación: $y = -\frac{1}{3}(x + 3) \ \rightarrow \ 3y = -x - 3 \ \rightarrow \ x + 3y + 3 = 0$

25 **Dados los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, 0)$ halla las ecuaciones de las rectas siguientes:**

r: pasa por A y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

s: pasa por B y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

r: pasa por $A(-3, 2)$ y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (5, 0) - (-3, 2) = (8, -2)$$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(1, 4)$, que es vector dirección de la recta r $\rightarrow$

$\rightarrow \ m = 4$

Ecuación de r: $y = 2 + 4(x + 3) \ \rightarrow \ y = 4x + 14 \ \rightarrow \ 4x - y + 14 = 0$

s: pasa por $B(5, 0)$ y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

Ecuación de s: $y = 4(x - 5) \ \rightarrow \ y = 4x - 20 \ \rightarrow \ 4x - y - 20 = 0$

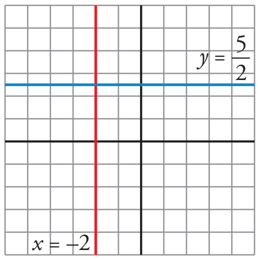
Página 172

26 **Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.**

$3x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$ recta paralela al eje Y

$2y - 5 = 0 \;\rightarrow\; y = \dfrac{5}{2}$ recta paralela al eje X

Punto de intersección: $\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$



27 **Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:**

a) r: $2x + 7 = 0$ **b) s: $-y + 4 = 0$**

a) r: $2x + 7 = 0$

$2x + 7 = 0 \;\rightarrow\; x = -\dfrac{7}{2}$ es paralela al eje Y.

Por tanto, la recta perpendicular a r es paralela al eje $X \;\rightarrow\; y = k$

Como pasa por $(4, -3)$, su ecuación es $y = -3 \;\rightarrow\; y + 3 = 0$

b) r: $-y + 4 = 0$

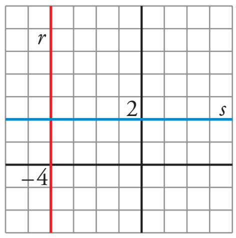
$-y + 4 = 0 \;\rightarrow\; y = 4$ es paralela al eje X.

Por tanto, la recta perpendicular a r es paralela al eje $Y \;\rightarrow\; x = k$

Como pasa por $(4, -3)$, su ecuación es $x = 4 \;\rightarrow\; x - 4 = 0$

28 **Las rectas r y s pasan por el punto $(-4, 2)$; r es paralela a $3x - 12 = 0$ y s es perpendicular a ella. Representa r y s y halla su ecuación.**

- Por ser r paralela a $3x - 12 = 0$, r será de la forma $x = k$. Como pasa por $(-4, 2) \;\rightarrow\; x = -4 \;\rightarrow$ r: $x + 4 = 0$
- Por ser s perpendicular a $3x - 12 = 0$, s será de la forma $y = k'$. Como pasa por $(-4, 2) \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow$ s: $y - 2 = 0$



29 **La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$. Escribe las ecuaciones de las rectas r y s.**

La pendiente de r coincidirá con la pendiente de la recta $5x - 4y + 3 = 0$, por ser ambas paralelas $\;\rightarrow\; m = \dfrac{5}{4}$

s es perpendicular a $r \;\rightarrow\;$ pendiente de s es $-\dfrac{1}{m} = -\dfrac{4}{5}$

Tanto r como s pasan por el punto $(-4, 2)$, luego:

• Ecuación de r $\rightarrow$ $y = 2 + \frac{5}{4}(x + 4)$ $\rightarrow$ $y = \frac{5}{4}x + 7$ $\rightarrow$ $5x - 4y + 28 = 0$

• Ecuación de s $\rightarrow$ $y = 2 - \frac{4}{5}(x + 4)$ $\rightarrow$ $5y = 10 - 4x - 16$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $4x + 5y + 6 = 0$

30 **Determina el punto de corte de las rectas:**

r: $5x + 4y + 3 = 0$ **s: $-4x + 2y - 5 = 0$**

Para hallar el punto de corte, resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 4y + 3 = 0 \\ -4x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} 5x + 4y + 3 = 0 \\ 8x - 4y + 10 = 0 \\ \hline 13x \quad + 13 = 0 \end{array} \rightarrow x = -1$$

$5 \cdot (-1) + 4y + 3 = 0$ $\rightarrow$ $4y - 2 = 0$ $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2}$

El punto de corte es $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Distancias y circunferencia

31 **Calcula la distancia entre P y Q:**

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ **b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$**

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ **d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$**

a) $dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{12^2} = 12$

b) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(-6+8)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

d) $dist\,(P, Q) = \sqrt{(15+3)^2} = \sqrt{18^2} = 18$

32 **Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?**

Un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados miden lo mismo.

Calculamos, pues, $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ y $|\overrightarrow{BC}|$:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(7+1)^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$$

El triángulo de vértices A, B y C es isósceles.

33 **Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.**

$A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \end{array}\right\} \begin{array}{c} |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \text{ por Pitágoras:} \\ (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{58})^2 \\ 29 + 29 = 58 \end{array}$$

El triángulo de vértices A, B y C es rectángulo.

34 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro C y radio r:**

a) $C(4, -3)$, $r = 3$ **b) $C(0, 5)$, $r = 6$**

c) $C(6, 0)$, $r = 2$ **d) $C(0, 0)$, $r = 5$**

a) $C(4, -3)$, $r = 3$

$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 9$

$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$

b) $C(0, 5)$, $r = 6$

$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 = 36$

$x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

c) $C(6, 0)$, $r = 2$

$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$

$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

d) $C(0, 0)$, $r = 5$

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0$

35 **Di cuál es el centro y el radio de las circunferencias siguientes:**

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 81$

c) $x^2 + y^2 = 10$

a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \rightarrow C(2, -3)$, $r = 4$

b) $(x + 1)^2 + y^2 = 81 \rightarrow C(-1, 0)$, $r = 9$

c) $x^2 + y^2 = 10 \rightarrow C(0, 0)$, $r = \sqrt{10}$

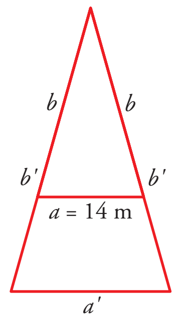
PIENSA Y RESUELVE

36 El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

$P = a + 2b = 64 \;\rightarrow\; 14 + 2b = 64 \;\rightarrow\; b = 25$ m

Como los triángulos son semejantes: $\frac{a'}{b'} = \frac{14}{25} \;\rightarrow\; a' = \frac{14b'}{25}$

$P' = a' + 2b' = 96;\; P' = \frac{14b'}{25} + 2b' = 96$



$14b' + 50b' = 2\,400 \;\rightarrow\; b' = 37{,}5$ m $\rightarrow\; a' = 21$ m

$h' = \sqrt{37{,}5^2 - (21/2)^2} = 36$ m

Área $= \frac{21 \cdot 36}{2} = 378$ m^2

37 Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

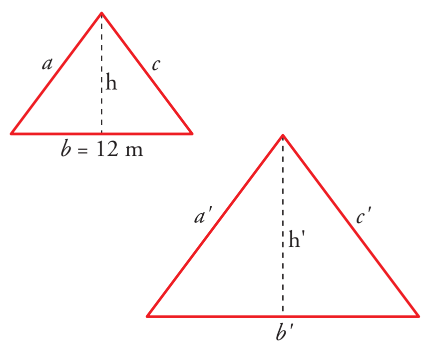
$P = 24 + 28 + 34 = 86$ m; $P' = 129$ m

$\frac{86}{129} = \frac{24}{a'} = \frac{28}{b'} = \frac{34}{c'}$

$a' = 36$ m, $b' = 42$ m, $c' = 51$ m

38 Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m^2 y 108 m^2. Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?

Si la razón de semejanza entre los lados de un triángulo es k, la razón entre sus áreas es k^2.



$k^2 = \frac{108}{48} = 2{,}25 \;\rightarrow\; k = 1{,}5$

$b' = 12 \cdot 1{,}5 = 18$ m

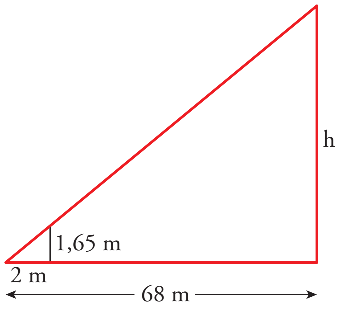
$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \text{h} = 48 \;\rightarrow\; \text{h} = 8$ m

h' $= 1{,}5 \cdot 8 = 12$ m

$a' = \sqrt{(\text{h}')^2 + \left(\frac{b'}{2}\right)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ m} = c'$

$P' = a' + b' + c' = 30 \text{ m} + 18 \text{ m} = 48$ m

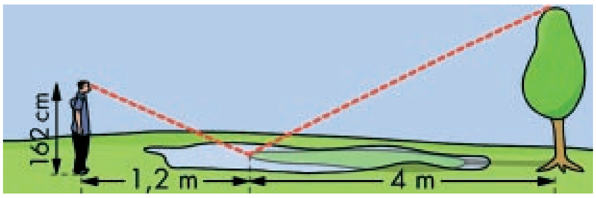
39 **¿Cuál es la altura de una casa que proyecta una sombra de 68 m, al mismo tiempo que una persona de 1,65 m de altura proyecta una sombra de 2 m?**

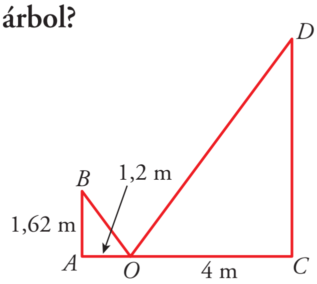


$$\frac{68}{h} = \frac{2}{1{,}65} \rightarrow h = 56{,}1 \text{ m}$$

La casa tiene una altura de 56,1 m.

40 **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**



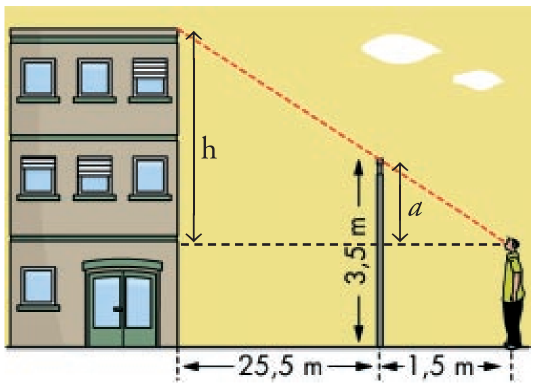


Ambos triángulos son semejantes:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4}{1{,}2} \rightarrow \overline{CD} = \frac{4 \cdot 1{,}62}{1{,}2} = 5{,}4$$

La altura del árbol es de 5,4 m.

41 **Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?**



$a = 3{,}5 - 1{,}65 = 1{,}85$ m

$$\frac{25{,}5 + 1{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1{,}85} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{27 \cdot 1{,}85}{1{,}5} = 33{,}3 \text{ m}$$

La altura de la casa es: $33{,}3 + 1{,}65 = 34{,}95$ m

Página 173

42 **Dados los puntos $A(-1, 1)$ y $B(3, 4)$, halla:**

a) La ecuación de una recta r que pase por A y sea perpendicular a AB.

b) La ecuación de una recta s que pase por B y sea paralela al eje X.

c) El punto de corte de r y s.

$A(-1, 1)$ y $B(3, 4)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 4) - (-1, 1) = (4, 3) \rightarrow m = \frac{3}{4}$

Pendiente de r es $-\frac{1}{m} = -\frac{4}{3}$

r pasa por A y su pendiente es $-\frac{4}{3} \rightarrow$ su ecuación será:

$y = 1 - \frac{4}{3}(x + 1) \rightarrow 3y = 3 - 4x - 4 \rightarrow 4x + 3y + 1 = 0$

b) s es una recta paralela al eje $X \rightarrow$ su ecuación será de la forma $y = k$. Como pasa por $B(3, 4) \rightarrow y = 4 \rightarrow y - 4 = 0$

c) El punto de intersección de r y s será la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y + 1 = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4x + 12 + 1 = 0 \\ 4x = -13 \rightarrow x = -\frac{13}{4} \end{array}$$

El punto de corte entre r y s es $\left(-\frac{13}{4}, 4\right)$.

43 **Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas y de las bisectrices de los cuadrantes primero y segundo.**

Ecuación del eje $X \rightarrow y = 0$

Ecuación del eje $Y \rightarrow x = 0$

Ecuación de la bisectriz del 1er cuadrante $\rightarrow y = x \rightarrow y - x = 0$

Ecuación de la bisectriz del 2º cuadrante $\rightarrow y = -x \rightarrow y + x = 0$

44 **Comprueba si los puntos $A(14, 0)$, $B(-9, 3)$, $C(2, 3/2)$ y $D(4, 8/7)$ pertenecen a la recta determinada por los puntos $P(-2, 2)$ y $Q(5, 1)$.**

Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por $P(-2, 2)$ y $Q(5, 1)$:

$\overrightarrow{PQ} = (5 + 2, 1 - 2) = (7, -1) \rightarrow m = -\frac{1}{7}$

Ecuación $\rightarrow y = 1 - \frac{1}{7}(x - 5) \rightarrow 7y = 7 - x + 5 \rightarrow r: x + 7y - 12 = 0$

Para comprobar si un punto pertenece a una recta determinada, se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación de la recta. Si se verifica la ecuación, el punto pertenece a dicha recta.

$A(14, 0) \;\rightarrow\; 14 + 7 \cdot 0 - 12 \neq 0 \;\rightarrow\; A$ no pertenece a r.

$B(-9, 3) \;\rightarrow\; -9 + 7 \cdot 3 - 12 = 0 \;\rightarrow\; B$ pertenece a r.

$C\left(2, \dfrac{3}{2}\right) \;\rightarrow\; 2 + 7 \cdot \dfrac{3}{2} - 12 \neq 0 \;\rightarrow\; C$ no pertenece a r.

$D\left(4, \dfrac{8}{7}\right) \;\rightarrow\; 4 + 7 \cdot \dfrac{8}{7} - 12 = 0 \;\rightarrow\; D$ pertenece a r.

45 **Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: x + 4y - 13 = 0$, y el punto $(3, -2)$ es uno de sus vértices.**

a) Dibuja el paralelogramo.

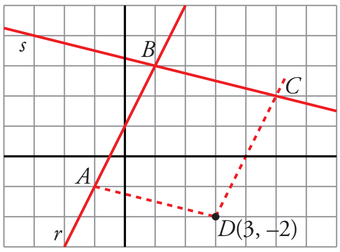
b) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

c) Calcula las coordenadas de los vértices.

a) Representamos las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: x + 4y - 13 = 0$:

r pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 3)$

s pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(-3, 4)$



b) • Lado $\overline{AD}$ paralelo a la recta s:

Pendiente de s es $-\dfrac{1}{4}$.

Ecuación del lado $\overline{AD}$:

$$y = -2 - \frac{1}{4}(x - 3) \;\rightarrow\; 4y = -8 - x + 3 \;\rightarrow\; x + 4y + 5 = 0$$

• Lado $\overline{CD}$ paralelo a la recta r:

Pendiente de r es 2.

Ecuación de lado $\overline{CD}$:

$$y = -2 + 2(x - 3) \;\rightarrow\; y = 2x - 8 \;\rightarrow\; 2x - y - 8 = 0$$

c) • El vértice A es el punto de corte de r y $\overline{AD}$:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ x + 4y + 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ -2x - 8y - 10 &= 0 \\ \hline -9y - 9 &= 0 \;\rightarrow\; y = -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 4 + 5 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

• Vértice B: punto de corte de r y s:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ x + 4y - 13 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ -2x - 8y + 26 &= 0 \\ \hline -9y + 27 &= 0 \;\rightarrow\; y = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 12 - 13 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

• Vértice C: punto de corte de s y $\overline{CD}$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x + 4y - 13 = 0 \\ 8x - 4y - 32 = 0 \\ \hline 9x \qquad - 45 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 10 - y - 8 = 0 \\ y = 2 \\ \to \; x = 5 \end{array}$$

Los vértices del paralelogramo son: $A(-1, -1)$, $B(1, 3)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -2)$

46 **a) Escribe la ecuación de una recta r que es paralela al eje OY y que pasa por el punto $(-3, 2)$.**

b) Halla el punto de corte de r con la recta: $3x + 4y - 7 = 0$

a) Por ser r paralela al eje OY su ecuación es de la forma $x = k$; como pasa por $(-3, 2)$ $\to$ $x = -3$ $\to$ $x + 3 = 0$

b) Se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - 7 = 0 \\ x + \qquad 3 = 0 \end{array}\right\} \quad -9 + 4y - 7 = 0 \;\to\; 4y = 16 \;\to\; y = 4$$

El punto de corte es $(-3, 4)$.

47 **Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(0, 4)$, $B(3, 0)$.**

La distancia entre los puntos $A(0, 4)$ y $B(3, 0)$ es:

$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

El radio de la circunferencia es $r = \frac{5}{2}$.

Su ecuación es: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$x^2 + \frac{9}{4} - 3x + y^2 + 4 - 4y = \frac{25}{4}$

$4x^2 + 9 - 12x + 4y^2 + 16 - 16y = 25$

$4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y = 0$

48 **Representa la circunferencia $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ y di en qué se transforma mediante cada uno de los siguientes movimientos:**

a) Una traslación de vector $\vec{t}(3, 4)$.

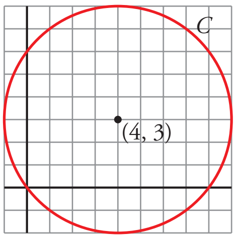
b) Un giro de centro $(4, 0)$ y ángulo $-90°$.

c) Un giro de centro $(4, 3)$ y ángulo $30°$.

d) Una simetría de eje $y = 0$.

e) Una simetría de eje $y = -x$.

f) Una simetría de eje $y = x - 1$.



Es una circunferencia de centro (4, 3) y radio $r = 5$.

a) Mediante $\vec{t}(3, 4)$ se transforma en una circunferencia de centro (7, 7) y radio 5.

b) El centro se transforma en el punto (7, 0). Su radio sigue siendo de 5 unidades.

c) Se transforma en sí misma.

d) El centro se transforma en el punto (4, –3); el radio es de 5 unidades.

e) Circunferencia de centro (–4, –3) y radio 5.

f) Se transforma en sí misma.

49 Di en qué se transforma el eje Y según cada uno de los movimientos descritos en el ejercicio anterior.

a) Recta $x = 3$

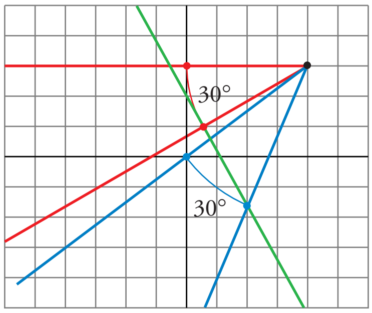
b) Recta $y = 4$

c) Recta que se observa en el gráfico.

d) Eje Y

e) Eje X

f) Recta $y = -1$



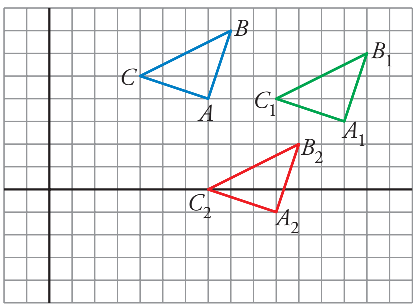
50 Halla el transformado del triángulo de vértices $A(7, 4)$, $B(8, 7)$, $C(4, 5)$ mediante la transformación $T_2 \circ T_1$, siendo T_1 y T_2 las traslaciones de vectores $\vec{t_1}(6, -1)$ y $\vec{t_2}(-3, -4)$.

$T_1(\widehat{ABC}) = \widehat{A_1B_1C_1}$

$T_2(\widehat{A_1B_1C_1}) = \widehat{A_2B_2C_2}$ donde $A_2(10, -1)$, $B_2(11, 2)$ y $C_2(7, 0)$

$T_2 \circ T_1$ resulta ser una traslación de vector

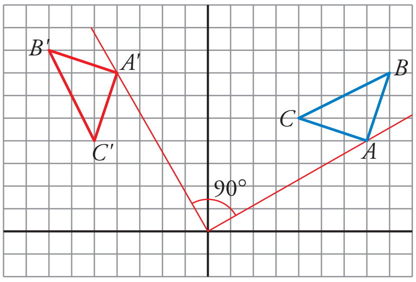
$\vec{t_1} + \vec{t_2} = (3, -5)$



PROFUNDIZA

51 **Halla el transformado del mismo triángulo ABC del ejercicio anterior mediante la transformación $G_2 \circ G_1$, siendo G_1 y G_2 los giros de centro $O(0, 0)$ y ángulos $\alpha_1 = 120°$ y $\alpha_2 = -30°$.**

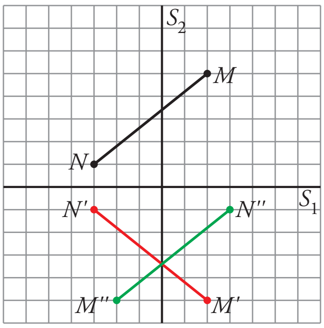
El giro $G_2 \circ G_1$ es otro giro, G, de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$.



52 **a) Transforma el segmento de extremos $M(2, 5)$, $N(-3, 1)$ mediante la transformación $S_2 \circ S_1$, siendo S_1 y S_2 las simetrías de ejes e_1: el eje X, e_2: el eje Y.**

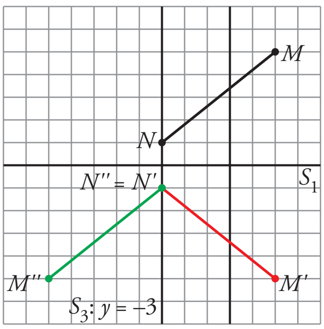
b) Transforma MN mediante la transformación $S_3 \circ S_1$, siendo S_3 la simetría de eje e_3: $y = -3$.

a)



Resulta, mediante S_1, el segmento de extremos $M'(2, -5)$, $N'(-3, -1)$, y aplicando a $M'N'$ la simetría S_2, obtenemos el segmento $M''N''$ de coordenadas $M''(-2, -5)$ y $N''(3, -1)$.

b)



En este caso obtenemos el segmento de extremos $M''(-5, -5)$ $N''(-3, -1)$.

53 **Tenemos una traslación $T(\vec{t})$: $\vec{t}(6, 0)$, y un giro $G(C, \alpha)$: $C(3, 3)$, $\alpha = -90°$. Vamos a demostrar que la transformación $M = G \circ T$ es un giro G' de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = -90°$.**

a) $P(-2, 10)$. Halla $P' = T(P)$, $P'' = G(P')$ y comprueba que $P'' = G'(P)$.

b) Halla dos simetrías S_1 y S_2 de modo que el eje de S_2 pase por C (centro del giro G) y tales que $T = S_2 \circ S_1$.

c) Halla S_3 de modo que $G = S_3 \circ S_2$ siendo S_2 la misma del apartado anterior.

d) Observa que:

$$M = G \circ T = (S_3 \circ S_2) \circ (S_2 \circ S_1) = S_3 \circ (S_2 \circ S_2) \circ S_1 = S_3 \circ I \circ S_1 = S_3 \circ S_1$$

Justifica cada paso de la igualdad anterior.

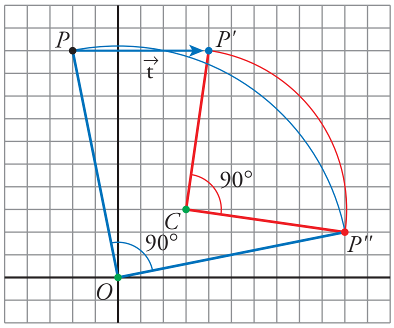
e) Puesto que $M = S_3 \circ S_1$, ¿qué tipo de transformación es M?

Observa que hemos probado que el resultado de componer una traslación con un giro es otro giro.

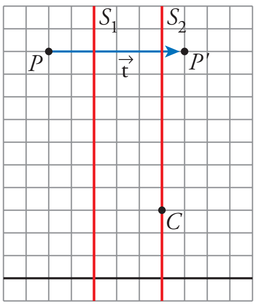
a) $P' = T(P) = (4, 10)$

$P'' = G(P') = G(4, 10) = (10, 2)$

$G'(P) = G'(-2, 10) = (10, 2)$

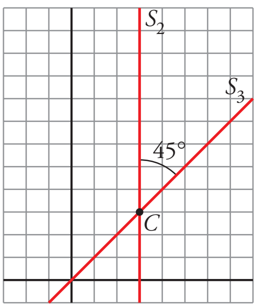


b)



$$\left.\begin{array}{l} S_1\text{: eje } Y \\ S_2\text{: } x = 3 \end{array}\right\} T = S_2 \circ S_1$$

c)



$S_3 \circ S_2 = G$

d) La composición de una simetría por sí misma es la identidad, y $S \circ I = I \circ S = S$.

e) M es un giro.