



BLOQUE III

Geometría

7. Semejanza
8. Geometría analítica



1. Teorema de Thales

PIENSA Y CALCULA

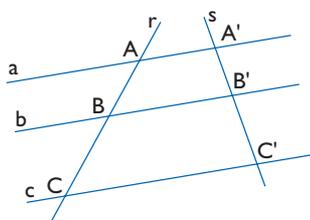
Si una persona que mide 1,70 m proyecta una sombra de 3,40 m y el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de un árbol mide 15 m, ¿cuánto mide de alto el árbol?

Solución:

Se observa que el objeto mide la mitad que la sombra; por tanto, el árbol mide $15 : 2 = 7,5$ m

APLICA LA TEORÍA

- 1** Sabiendo que en el siguiente dibujo $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm y $A'B' = 15$ cm, halla la longitud del segmento $B'C'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{15}{18} = \frac{B'C'}{24}$$

$$B'C' = 20 \text{ cm}$$

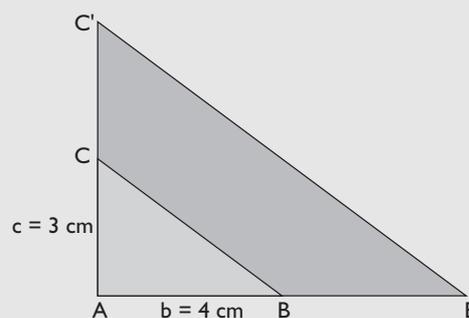
Hemos aplicado el teorema de Thales.

- 2** Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm y 3 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo en posición de Thales de forma que el cateto mayor mida 8 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución:

$$r = 8 : 4 = 2$$

$$c' = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$



- 3** Dos ángulos de un triángulo miden 45° y 60° y otros dos ángulos de otro triángulo miden 75° y 60° . ¿Son semejantes ambos triángulos?

Solución:

El 3^{er} ángulo del 1^{er} triángulo mide:

$$180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Es decir, los ángulos del 1^{er} triángulo miden:

$$45^\circ, 60^\circ \text{ y } 75^\circ$$

El 3^{er} ángulo del 2° triángulo mide:

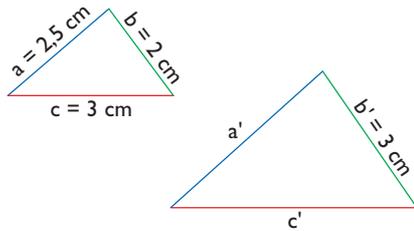
$$180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Es decir, los ángulos del 2° triángulo miden:

45°, 60° y 75°

Como los dos triángulos tienen sus ángulos iguales, son semejantes.

- 4** Los dos triángulos del siguiente dibujo son semejantes. Halla cuánto miden a' y c'



Solución:

$$r = b' : b$$

$$r = 3 : 2 = 1,5$$

$$a' = 1,5 \cdot 2,5 = 3,75 \text{ cm}$$

$$c' = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ cm}$$

- 5** En una foto están Ana y su madre. Se sabe que Ana mide en la realidad 1,65 m. En la foto Ana

mide 6,6 cm, y su madre, 6,88 cm. ¿Cuánto mide su madre en la realidad?

Solución:

$$\frac{6,6}{165} = \frac{6,88}{x}$$

$$x = 172 \text{ cm} = 1,72 \text{ m}$$

- 6** Un palo vertical de 1,75 m proyecta una sombra de 2 m. Si la sombra de un edificio el mismo día, en el mismo sitio y a la misma hora mide 24 m, ¿cuánto mide de alto el edificio?

Solución:

$$\frac{2}{1,75} = \frac{24}{x}$$

$$x = 21 \text{ m}$$

- 7** La superficie de una esfera es de 15 m². Halla la superficie de otra esfera en la que el radio mide el triple.

Solución:

$$S' = 3^2 \cdot 15 = 135 \text{ m}^2$$

2. Teorema de Pitágoras

PIENSA Y CALCULA

¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) 3, 4 y 5

b) 6, 7 y 8

c) 6, 8 y 10

d) 5, 12 y 13

Solución:

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$

b) $6^2 + 7^2 \neq 8^2$

c) $6^2 + 8^2 = 10^2$

d) $5^2 + 12^2 = 13^2$

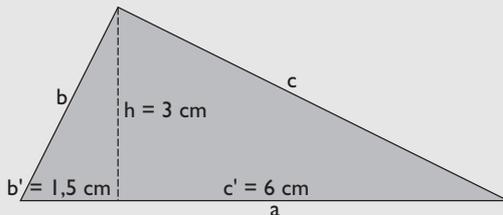
Son ternas pitagóricas a), c) y d)

- 8** En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos de longitudes 1,5 cm y 6 cm. Halla la longitud de dicha altura y dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

$$h = \sqrt{1,5 \cdot 6} = 3 \text{ cm}$$



- 9** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 m y la proyección del cateto **b** sobre ella mide 3,6 m. Halla:

- la longitud del cateto **b**
- la longitud de la proyección del cateto **c** sobre la hipotenusa.
- la longitud del cateto **c**
- la longitud de la altura relativa a la hipotenusa **h**
- Dibuja el triángulo rectángulo.

Solución:

$$a) b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$$

$$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6 \text{ m}$$

$$b) c' = a - b'$$

$$c' = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ m}$$

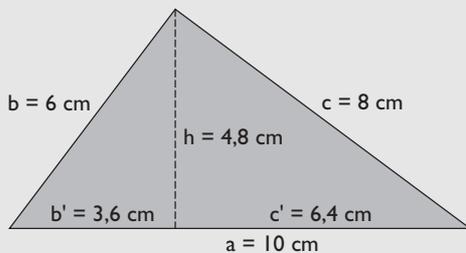
$$c) c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$$

$$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8 \text{ m}$$

$$d) h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

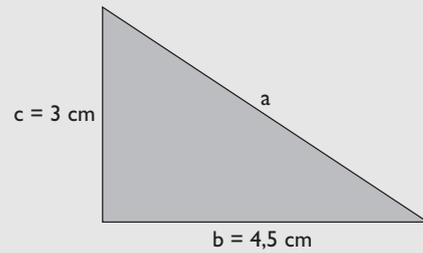
$$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8 \text{ m}$$

e) Dibujo



- 10** En un triángulo rectángulo los catetos miden 4,5 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

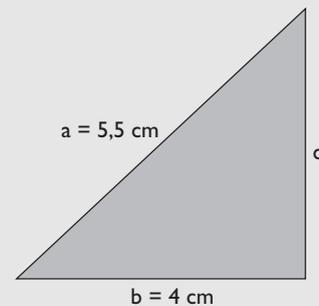


$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{4,5^2 + 3^2} = 5,41 \text{ cm}$$

- 11** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5,5 cm, y un cateto, 4 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

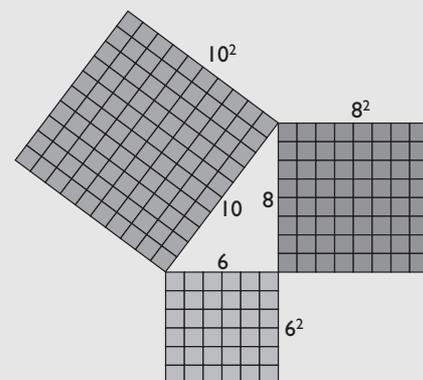


$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{5,5^2 - 4^2} = 3,77 \text{ cm}$$

- 12** Dibuja la interpretación gráfica del teorema de Pitágoras en el caso en que los lados midan 6, 8 y 10 cm

Solución:



$$6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$$

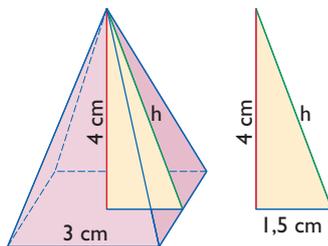
13 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

- a) 2, 3 y 4 b) 3, 4 y 5
c) 4, 5 y 6 d) 5, 12 y 13

Solución:

- a) $2^2 + 3^2 \neq 4^2 \Rightarrow$ No
b) $3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow$ Sí
c) $4^2 + 5^2 \neq 6^2 \Rightarrow$ No
d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ Sí

14 En una pirámide cuadrangular la arista de la base mide 3 cm, y la altura, 4 cm. Calcula el área lateral de dicha pirámide. Redondea el resultado a dos decimales.

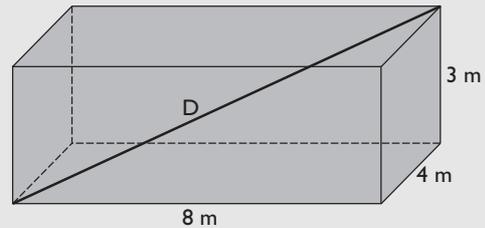


Solución:

$$h^2 = 1,5^2 + 4^2$$
$$h = 4,27 \text{ cm}$$
$$A_L = 4 \cdot \frac{3 \cdot 4,27}{2} = 25,62 \text{ cm}^2$$

15 Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 8 m, 4 m y 3 m

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 8^2 + 4^2 + 3^2$$
$$D = 9,43 \text{ m}$$

3. Planos, mapas y maquetas

PIENSA Y CALCULA

Si un plano tiene de escala 1:100 y un mapa 1:1 000 000, ¿qué escala es mayor?

Solución:

$$1:100 = 0,01$$
$$1:1000000 = 0,000001$$

Es mayor la primera 1:100

APLICA LA TEORÍA

16 Un dormitorio mide en la realidad 5 m de largo y en el plano mide 2 cm. Halla la escala del plano.

Solución:

$$2 \text{ cm} : 5 \text{ m} = 2 \text{ cm} : 500 \text{ cm} = 1:250$$

17 Dadas dos escalas 1:200 y 1:20 000

a) ¿Cuál es mayor?

b) ¿Cuál corresponde a un plano?

c) ¿Cuál corresponde a un mapa?

Solución:

- a) Es mayor 1:200
b) 1:200 > 1:10 000 Corresponde a un plano.
c) 1:20 000 < 1:1 000 Corresponde a un mapa.

- 18** Un terreno tiene forma rectangular y mide de largo 12 km. Se dibuja un rectángulo semejante de 6 cm de longitud.
- Halla la escala.
 - ¿El dibujo del terreno es un plano o un mapa?

Solución:

- Escala $6 \text{ cm} : 12 \text{ km} = 6 \text{ cm} : 1200\,000 = 1 : 200\,000$
- Como $1 : 200\,000 < 1 : 10\,000$ es un mapa.

- 19** En el plano de la página de la izquierda, el salón mide $3 \text{ cm} \times 2,5 \text{ cm}$. Calcula en la realidad sus dimensiones y el área.

Solución:

Dimensiones

$$3 \cdot 200 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$$

$$2,5 \cdot 200 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ m}^2$$

- 20** Midiendo con la regla en el mapa de la parte superior. Calcula la distancia que hay en línea recta de:
- Barcelona a La Coruña.
 - Bilbao a Cádiz.
 - Huelva a Oviedo.
 - Valencia a Madrid.

Solución:

- $3,3 \cdot 25\,000\,000 = 82\,500\,000 \text{ cm} = 825 \text{ km}$
- $3,2 \cdot 25\,000\,000 = 80\,000\,000 \text{ cm} = 800 \text{ km}$
- $2,8 \cdot 25\,000\,000 = 70\,000\,000 \text{ cm} = 700 \text{ km}$
- $1,2 \cdot 25\,000\,000 = 30\,000\,000 \text{ cm} = 300 \text{ km}$

- 21** Halla la altura del yate de la parte superior.

Solución:

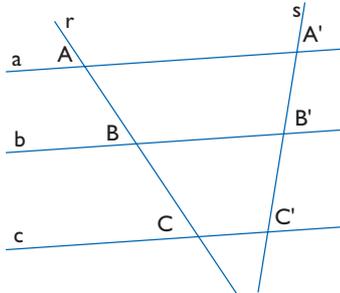
Altura:

$$2,2 \cdot 300 = 660 \text{ cm} = 6,6 \text{ m}$$

Ejercicios y problemas

1. Teorema de Thales

- 22** Sabiendo que $AB = 7,5$ cm, $BC = 10$ cm y $B'C' = 12$ cm, halla la longitud del segmento $A'B'$. ¿Qué teorema has aplicado?



Solución:

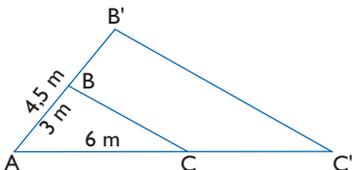
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{A'B'}{7,5} = \frac{12}{10}$$

$$A'B' = 9 \text{ cm}$$

Hemos aplicado el teorema de Thales.

- 23** Sabiendo que $AB = 3$ m, $AC = 6$ m y $AB' = 4,5$ m, halla la longitud del lado AC' . ¿Cómo están los triángulos ABC y $AB'C'$?



Solución:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

$$\frac{4,5}{3} = \frac{AC'}{6}$$

$$AC' = 9 \text{ cm}$$

Los triángulos ABC y $AB'C'$ están en posición de Thales.

- 24** Un ángulo de un triángulo mide 53° y los lados que lo forman miden $a = 6$ cm y $b = 9$ cm. En otro triángulo semejante se sabe que un ángulo mide 53° y que uno de los lados que lo forman mide $a' = 15$ cm. ¿Cuánto mide el otro lado del ángulo de 53° ?

Solución:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{15}{6} = \frac{x}{9}$$

$$x = 22,5 \text{ cm}$$

- 25** Un árbol de $1,6$ m proyecta una sombra de $1,2$ m. En el mismo sitio, el mismo día y a la misma hora, la sombra de una antena de telefonía móvil mide 52 m. ¿Cuánto mide de alto la antena de telefonía móvil?

Solución:

$$\frac{1,2}{1,6} = \frac{52}{x}$$

$$x = 69,33 \text{ cm}$$

- 26** El volumen de una esfera es de $7,5 \text{ cm}^3$. Halla el volumen de otra esfera en la que el radio mide el doble.

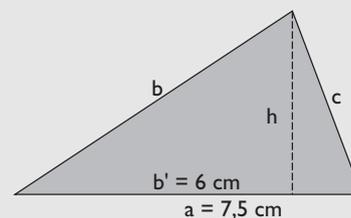
Solución:

$$V' = 2^3 \cdot 7,5 = 60 \text{ cm}^3$$

2. Teorema de Pitágoras

- 27** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $7,5$ cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide 6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de dicha altura.

Solución:



$$h^2 = b' \cdot c'$$

$$b' = 6 \text{ cm}$$

$$c' = a - b' = 7,5 - 6 = 1,5 \text{ cm}$$

$$h^2 = 6 \cdot 1,5 = 9$$

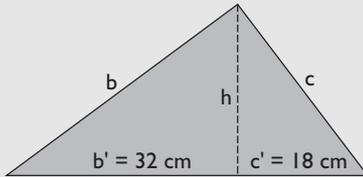
$$h = 3 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

28 En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 32$ cm y $c' = 18$ cm. Halla:

- el cateto **b**
- el cateto **c**

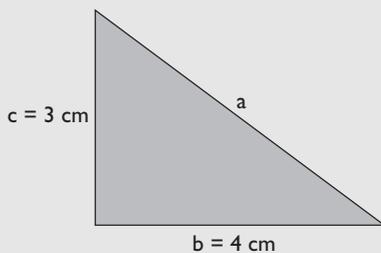
Solución:



- $b^2 = a \cdot b'$
 $a = b' + c' = 32 + 18 = 50$ cm
 $b^2 = 50 \cdot 32$
 $b = 40$ cm
- $c^2 = a \cdot c'$
 $c^2 = 50 \cdot 18$
 $c = 30$ cm

29 En un triángulo rectángulo los catetos miden 4 cm y 3 cm. Haz el dibujo y halla la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo rectángulo.

Solución:



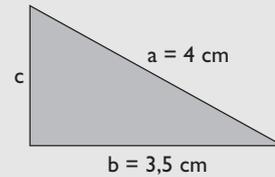
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

30 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4 cm, y un cateto, 3,5 cm. Haz el dibujo y halla la longitud del otro cateto. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{4^2 - 3,5^2} = 1,94 \text{ cm}$$

31 ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

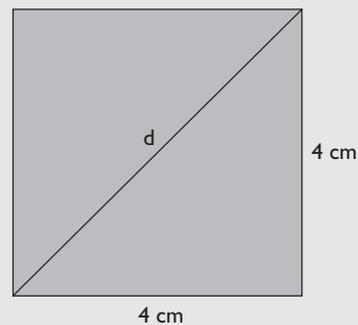
- 5, 7 y 9
- 6, 8 y 10
- 7, 9 y 11
- 10, 24 y 26

Solución:

- $5^2 + 7^2 \neq 9^2 \Rightarrow$ No
- $6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow$ Sí
- $7^2 + 9^2 \neq 11^2 \Rightarrow$ No
- $10^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$ Sí

32 Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado y su diagonal. Halla la longitud de la diagonal. Redondea el resultado a un decimal y comprueba el resultado midiendo con una regla.

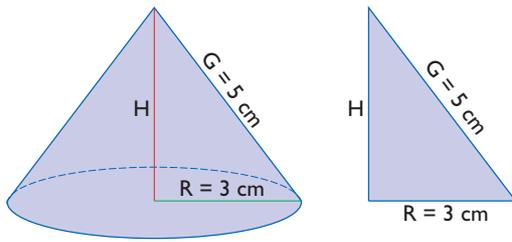
Solución:



$$d^2 = 4^2 + 4^2$$

$$d = 5,7 \text{ cm}$$

33 Del siguiente cono se sabe que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 5 cm. Calcula el volumen de dicho cono. Redondea el resultado a dos decimales.



Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura H

$$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow H = \sqrt{G^2 - R^2}$$

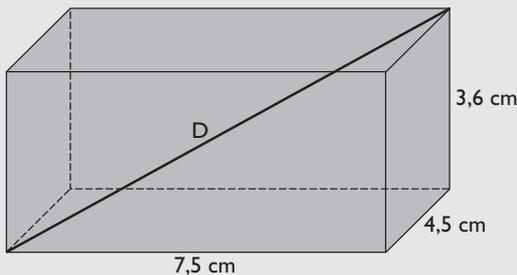
$$H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$V = A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37,70 \text{ cm}^2$$

- 34** Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 7,5 cm, 4,5 cm y 3,6 cm

Solución:



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 7,5^2 + 4,5^2 + 3,6^2$$

$$D = 9,42 \text{ cm}$$

3. Planos, mapas y maquetas

- 35** Un pasillo de una casa mide en la realidad 10 m de largo y en el plano mide 4 cm. Halla la escala del plano.

Solución:

$$4 \text{ cm} : 10 \text{ m} = 4 \text{ cm} : 1000 \text{ cm} = 1:250$$

- 36** Dadas dos escalas 1:300 y 1:300 000

- a) ¿Cuál es mayor?
- b) ¿Cuál corresponde a un plano?
- c) ¿Cuál corresponde a un mapa?

Solución:

- a) Es mayor 1:300

- b) 1:300 > 1:10 000 Corresponde a un plano.
- c) 1:300 000 < 1:1 000 Corresponde a un mapa.

- 37** Un terreno tiene forma triangular y uno de los lados mide de 500 m. Se dibuja un triángulo semejante y el lado correspondiente mide 2,5 cm de longitud.

- a) Halla la escala.
- b) ¿El dibujo del terreno es un plano o un mapa?

Solución:

a) Escala $2,5 \text{ cm} : 500 \text{ m} = 2,5 \text{ cm} : 50000 \text{ cm} = 1:20000$

- b) Como $1:20000 < 1:10000$ es un mapa.

- 38** Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta de:

- a) Madrid a Bruselas.
- b) Madrid a Roma.
- c) Londres a Roma.
- d) Londres a París.



Escala 1:100 000 000

Solución:

- a) $2,4 \cdot 100\,000\,000 = 240\,000\,000 \text{ cm} = 2\,400 \text{ km}$
- b) $2,4 \cdot 100\,000\,000 = 240\,000\,000 \text{ cm} = 2\,400 \text{ km}$
- c) $2,5 \cdot 100\,000\,000 = 250\,000\,000 \text{ cm} = 2\,500 \text{ km}$
- d) $0,7 \cdot 100\,000\,000 = 70\,000\,000 \text{ cm} = 700 \text{ km}$

- 39** Las dimensiones de una maqueta de un avión a escala 1:50 son: longitud 50 cm y envergadura 45 cm. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Solución:

Dimensiones

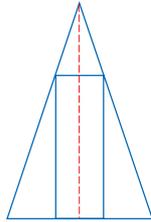
$$50 \cdot 50 = 2500 \text{ cm} = 25 \text{ m}$$

$$45 \cdot 50 = 2250 \text{ cm} = 22,5 \text{ m}$$

Ejercicios y problemas

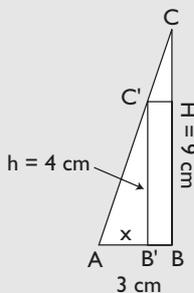
Para ampliar

- 40** Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la base del triángulo es $B = 6$ cm, y la altura, $H = 9$ cm, y que la altura del rectángulo es $h = 4$ cm, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

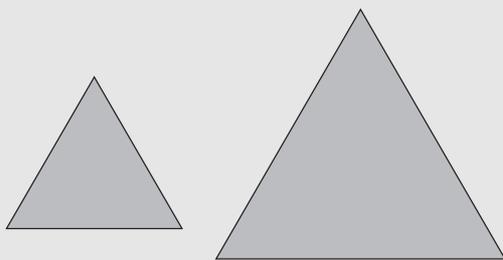
$$\frac{x}{6} = \frac{4}{9}$$

$$x = 1,33 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2(3 - 1,33) = 3,34 \text{ cm}$$

- 41** Dibuja dos triángulos equiláteros distintos. Razona si son semejantes.

Solución:



Si son semejantes, porque los ángulos de uno son iguales a los ángulos del otro.

- 42** Los lados de un triángulo miden $a = 5$ cm, $b = 7,5$ cm y $c = 9$ cm. Halla la medida de los lados a' , b' y c' de un triángulo semejante en el que $r = 1,5$

Solución:

$$a' = 1,5 \cdot a$$

$$a' = 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ cm}$$

$$b' = 1,5 \cdot b$$

$$b' = 1,5 \cdot 7,5 = 11,25 \text{ cm}$$

$$c' = 1,5 \cdot c$$

$$c' = 1,5 \cdot 9 = 13,5 \text{ cm}$$

- 43** Un palo de un metro de longitud colocado verticalmente proyecta una sombra de un metro. Si el mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar la sombra de la pirámide Kefrén mide 136 m, calcula mentalmente lo que mide de alto la pirámide de Kefrén.

Solución:

La pirámide de Kefrén mide lo mismo que la sombra, es decir, 136 m

- 44** El radio de una circunferencia mide x metros, y el radio de otra circunferencia es el triple. Calcula cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia y el área del círculo correspondiente.

Solución:

Longitud:

$$\frac{L'}{L} = 3$$

$$L' = 3L$$

La longitud es el triple.

Área:

$$\frac{A'}{A} = 3^2$$

$$A' = 9A$$

El área es nueve veces mayor.

- 45** Clasifica los siguientes triángulos en acutángulos, rectángulos y obtusángulos:

a) $a = 1$ cm, $b = 1,5$ cm, $c = 2$ cm

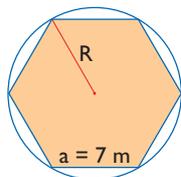
b) $a = 1,5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2,5$ cm

- c) $a = 2 \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$
 d) $a = 2,5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 6,5 \text{ cm}$

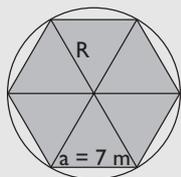
Solución:

- a) $1^2 + 1,5^2 = 3,25 < 2^2 = 4 \Rightarrow$ Obtusángulo.
 b) $1,5^2 + 2^2 = 2,5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.
 c) $2^2 + 2,5^2 = 10,25 > 3^2 = 9 \Rightarrow$ Acutángulo.
 d) $2,5^2 + 6^2 = 6,5^2 \Rightarrow$ Rectángulo.

- 46** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono:



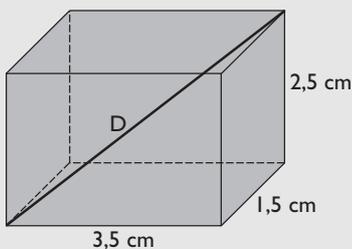
Solución:



En el hexágono coincide la longitud del lado y del radio de la circunferencia circunscrita; por tanto, $R = 7 \text{ m}$

- 47** Calcula la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son $3,5 \text{ cm}$, $1,5 \text{ cm}$ y $2,5 \text{ cm}$

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 3,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2$$

$$D = 4,56 \text{ cm}$$

- 48** Midiendo en el siguiente mapa de España calcula:

- a) La máxima longitud que hay en línea recta desde el Norte al Sur.
 b) La máxima longitud que hay en línea recta desde el Oeste al Este.



Escala 1:25 000 000

Solución:

- a) $3,4 \cdot 25\,000\,000 = 85\,000\,000 \text{ cm} = 850 \text{ km}$
 b) $4,4 \cdot 25\,000\,000 = 110\,000\,000 \text{ cm} = 1\,100 \text{ km}$

- 49** Las dimensiones de una maqueta de un camión a escala 1:60 son $15 \times 3,5 \times 6 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Solución:

Dimensiones

$$15 \cdot 60 = 900 \text{ cm} = 9 \text{ m}$$

$$3,5 \cdot 60 = 210 \text{ cm} = 2,1 \text{ m}$$

$$6 \cdot 60 = 360 \text{ cm} = 3,6 \text{ m}$$

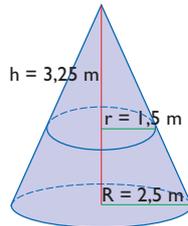
- 50** Un dormitorio de un plano tiene una superficie de 3 cm^2 . Si el plano está a escala 1:200, calcula la superficie del dormitorio en la realidad.

Solución:

$$\text{Superficie: } 3 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 120\,000 \text{ cm}^2 = 12 \text{ m}^2$$

Problemas

- 51** Dado el siguiente dibujo, calcula la medida de la altura H del cono grande.



Solución:

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{2,5}{1,5} = \frac{H}{3,25}$$

$$H = 5,42 \text{ m}$$

- 52** Los lados de un triángulo miden $a = 2 \text{ cm}$, $b = 2,5 \text{ cm}$ y $c = 3,5 \text{ cm}$. Sabiendo que en otro triángulo semejante $a' = 5 \text{ cm}$, halla la medida de los lados b' y c'

Solución:

Razón de semejanza:

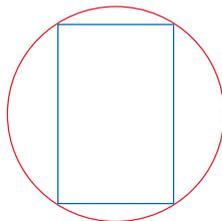
$$r = \frac{a'}{a}$$

$$r = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$b' = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25 \text{ cm}$$

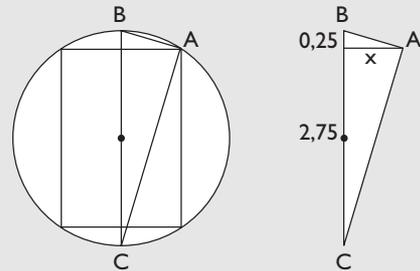
$$c' = 2,5 \cdot 3,5 = 8,75 \text{ cm}$$

- 53** Se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la circunferencia es $R = 1,5 \text{ cm}$ y que la altura del rectángulo es $h = 2,5 \text{ cm}$, halla cuánto mide la base del rectángulo.

Solución:



El triángulo dibujado es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 2,75 \cdot 0,25$$

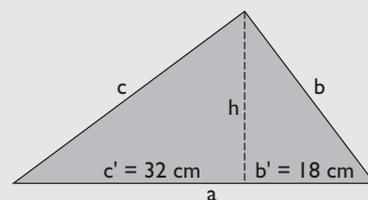
$$x = 0,83 \text{ cm}$$

$$\text{Base del rectángulo: } 2x = 2 \cdot 0,83 = 1,66 \text{ cm}$$

- 54** En un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos que miden $b' = 18 \text{ cm}$ y $c' = 32 \text{ cm}$. Halla:

- la longitud de la hipotenusa a
- la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.
- el cateto b
- el cateto c
- el área de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



$$\text{a) } a = b' + c'$$

$$a = 18 + 32 = 50 \text{ cm}$$

$$\text{b) } h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

$$h = \sqrt{18 \cdot 32} = 24 \text{ cm}$$

$$\text{c) } b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$$

$$b = \sqrt{50 \cdot 18} = 30 \text{ cm}$$

$$\text{d) } c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$$

$$c = \sqrt{50 \cdot 32} = 40 \text{ cm}$$

e) Área = $b \cdot c$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600 \text{ cm}^2$$

- 55** Un rectángulo mide 400 m de perímetro y 2 500 m² de área. Halla el área de otro rectángulo semejante que mide 1 000 m de perímetro.

Solución:

$$r = \frac{P'}{P}$$

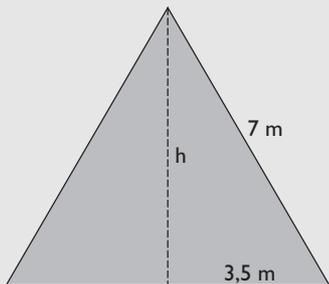
$$r = \frac{1\,000}{400} = 2,5$$

$$A' = r^2 \cdot A$$

$$A' = 2,5^2 \cdot 2\,500 = 15\,625 \text{ m}^2$$

- 56** Halla la altura de un triángulo equilátero de 7 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

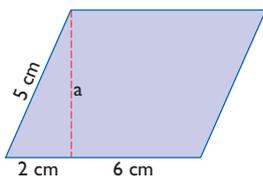
Solución:



$$h^2 + 3,5^2 = 7^2$$

$$h = 6,06 \text{ m}$$

- 57** Halla el área del siguiente romboide:



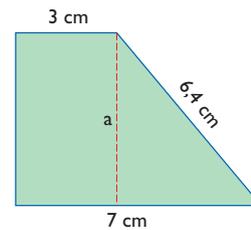
Solución:

$$a^2 + 2^2 = 5^2$$

$$a = 4,58 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = 8 \cdot 4,58 = 36,64 \text{ cm}^2$$

- 58** Halla el área del siguiente trapecio rectángulo:



Solución:

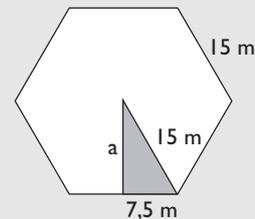
$$a^2 + 4^2 = 6,4^2$$

$$a = 5,00 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{7 + 3}{2} \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

- 59** Halla el área de un hexágono regular de 15 m de lado. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:

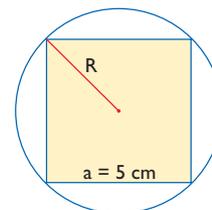


$$a^2 + 7,5^2 = 15^2$$

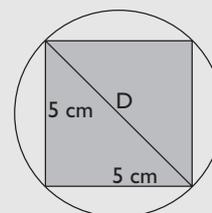
$$a = 12,99 = 13,00 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 15}{2} \cdot 13 = 585 \text{ cm}^2$$

- 60** Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente cuadrado:



Solución:



$$D^2 = 5^2 + 5^2$$

$$D = 7,07 \text{ cm}$$

$$R = D/2 = 3,54 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas

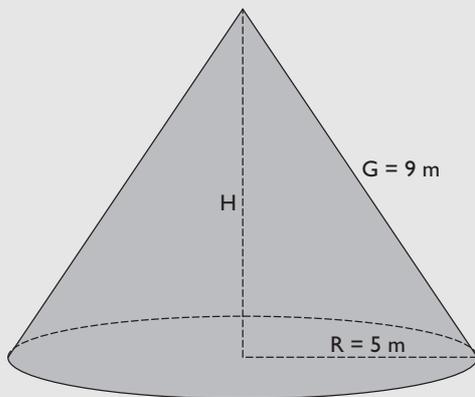
- 61** Una antena de radio proyecta una sombra de 57 m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, Sonia, que mide 1,75 m, proyecta una sombra de 2,20 m. Calcula la altura de la antena de radio.

Solución:

$$\frac{2,20}{1,75} = \frac{57}{x} \Rightarrow x = 45,34 \text{ m}$$

- 62** Halla el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 5 m y la generatriz mide 9 m. Redondea el resultado a dos decimales.

Solución:



$$H^2 + 5^2 = 9^2$$

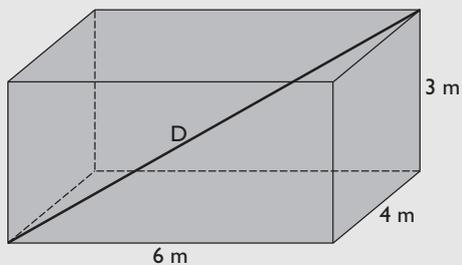
$$H = 7,48 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 7,48 = 195,83 \text{ m}^3$$

- 63** Calcula la diagonal de una habitación cuyas dimensiones son 6 m × 4 m × 3 m

Solución:

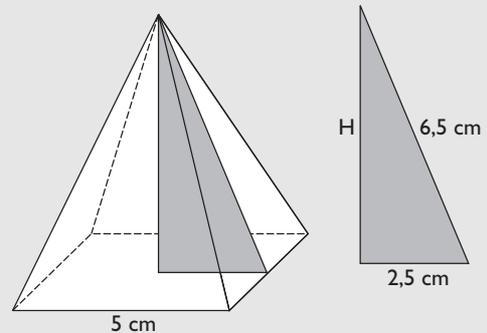


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 6^2 + 4^2 + 3^2 \Rightarrow D = 7,81 \text{ m}$$

- 64** Dibuja una pirámide regular cuadrangular en la que la arista de la base mide 5 cm y la apotema mide 6,5 cm. Calcula su volumen.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 2,5^2 = 6,5^2$$

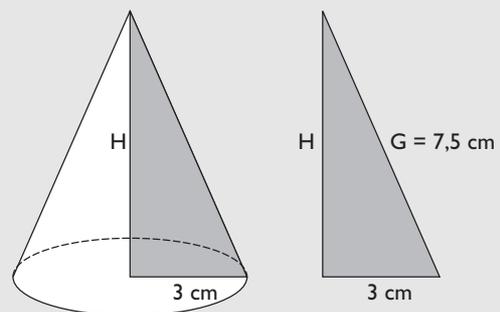
$$H = 6 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = 50 \text{ cm}^3$$

- 65** Dibuja un cono recto en el que el radio de la base mide 3 cm y la generatriz mide 7,5 cm. Halla su altura.

Solución:



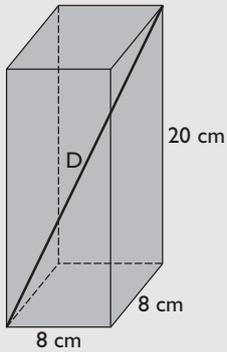
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 3^2 = 7,5^2$$

$$H = 6,87 \text{ cm}$$

- 66** Calcula la diagonal de un prisma recto cuadrangular cuya base tiene 8 cm de arista y 20 cm de altura.

Solución:

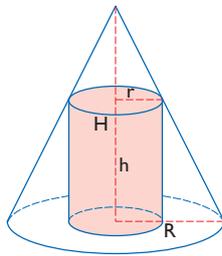


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 8^2 + 8^2 + 20^2$$

$$D = 22,98 \text{ cm}$$

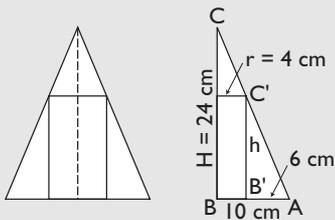
- 67** Se tiene un cilindro inscrito en un cono, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que la altura del cono es $H = 24 \text{ cm}$, el radio del cono es $R = 10 \text{ cm}$, y que el radio del cilindro mide $r = 4 \text{ cm}$, halla cuánto mide la altura h del cilindro.

Solución:

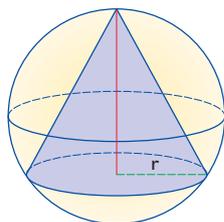
Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles.



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{h}{24} \Rightarrow x = 14,4 \text{ cm}$$

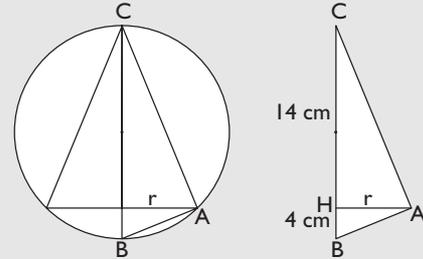
- 68** Se tiene un cono inscrito en una esfera, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 9 \text{ cm}$ y que la altura del cono es $h = 14 \text{ cm}$, halla cuánto mide el radio de la base del cono.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia.



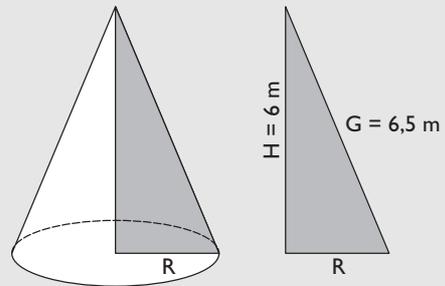
El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

$$r^2 = 14 \cdot 4 = 56 \Rightarrow r = 7,48 \text{ cm}$$

- 69** Halla el radio de la base de un cono recto en el que la altura mide 6 m , y la generatriz, $6,5 \text{ m}$

Solución:

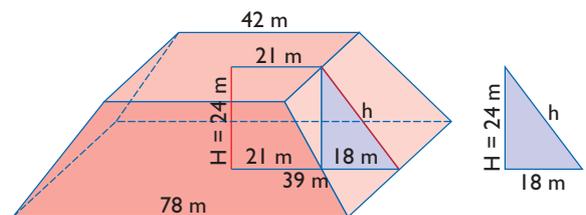


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$R^2 + 6^2 = 6,5^2$$

$$R = 2,5 \text{ m}$$

- 70** Calcula el área del siguiente tronco de pirámide:



Ejercicios y problemas

Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 18^2 + 24^2$$

$$h = 30 \text{ m}$$

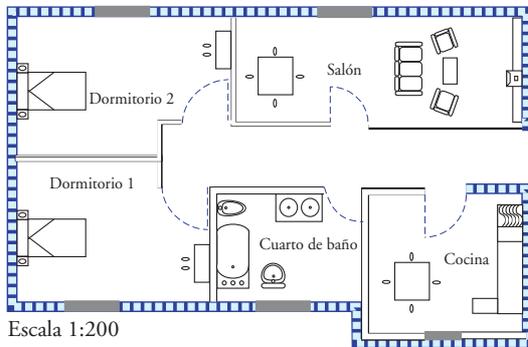
$$A_{B_1} = 78^2 = 6084 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = 42^2 = 1764 \text{ m}^2$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{78 + 42}{2} \cdot 30 = 7200 \text{ m}^2$$

$$A_T = 6084 + 1764 + 7200 = 15048 \text{ m}^2$$

71 En el plano siguiente:



Calcula la superficie:

- Del salón.
- De la cocina.
- Del cuarto de baño
- Del dormitorio 1
- Del dormitorio 2

Solución:

$$a) 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ cm}^2$$

$$6 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 240000 \text{ cm}^2 = 24 \text{ m}^2$$

$$b) 2,1 \cdot 2 = 4,2 \text{ cm}^2$$

$$4,2 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 168000 \text{ cm}^2 = 16,8 \text{ m}^2$$

$$c) 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ cm}^2$$

$$3 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 120000 \text{ cm}^2 = 12 \text{ m}^2$$

$$d) 2 \cdot 2,1 - 0,7 \cdot 0,4 = 3,92 \text{ cm}^2$$

$$3,92 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 156800 \text{ cm}^2 = 15,68 \text{ m}^2$$

$$e) 3 \cdot 1,9 - 0,4 \cdot 1 = 5,3 \text{ cm}^2$$

$$5,3 \text{ cm}^2 \cdot 200^2 = 212000 \text{ cm}^2 = 21,20 \text{ m}^2$$

72 En el siguiente mapa de Andalucía:



Calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- Huelva y Almería.
- Cádiz y Jaén.
- Sevilla y Málaga.
- Granada y Córdoba.

Solución:

$$a) 6 \cdot 8000000 = 48000000 \text{ cm} = 480 \text{ km}$$

$$b) 3,8 \cdot 8000000 = 30400000 \text{ cm} = 304 \text{ km}$$

$$c) 2,3 \cdot 8000000 = 18400000 \text{ cm} = 184 \text{ km}$$

$$d) 1,9 \cdot 8000000 = 15200000 \text{ cm} = 152 \text{ km}$$

73 Las dimensiones de una maqueta de un campo de fútbol a escala 1:500 son $80 \times 40 \times 8 \text{ cm}$. Calcula sus dimensiones en la realidad.

Solución:

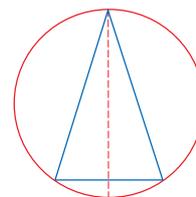
$$80 \cdot 500 = 40000 \text{ cm} = 400 \text{ m}$$

$$40 \cdot 500 = 20000 \text{ cm} = 200 \text{ m}$$

$$8 \cdot 500 = 4000 \text{ cm} = 40 \text{ m}$$

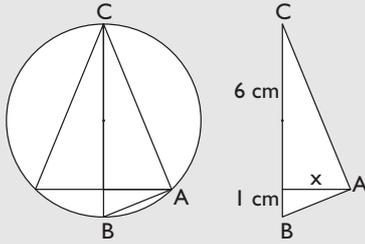
Para profundizar

74 Se tiene un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, como se indica en la siguiente figura:



Sabiendo que el diámetro de la circunferencia es $D = 7 \text{ cm}$ y que la altura del triángulo es $h = 6 \text{ cm}$, halla cuánto mide la base del triángulo isósceles.

Solución:



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

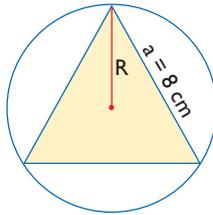
Aplicando el teorema de la altura:

$$x^2 = 6 \cdot 1$$

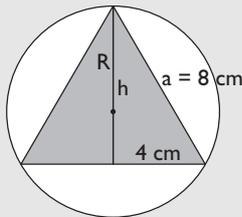
$$x = 2,45 \text{ cm}$$

$$\text{Base del triángulo: } 2x = 2 \cdot 2,45 = 4,90 \text{ cm}$$

75 Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero.



Solución:



$$h^2 + 4^2 = 8^2$$

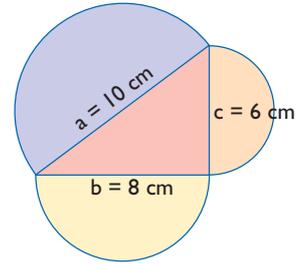
$$h = 6,93 \text{ cm}$$

El radio es los $2/3$ de la altura por una propiedad de las medianas de un triángulo.

$$R = \frac{2}{3} \cdot 6,93 = 4,62 \text{ cm}$$

76 Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden $a = 10 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ y $c = 6 \text{ cm}$. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se

sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.



Solución:

Área del semicírculo de radio $a = 10 \text{ cm}$

$$A_1 = \pi \cdot 10^2/2 = 157,08 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $b = 8 \text{ cm}$

$$A_2 = \pi \cdot 8^2/2 = 100,53 \text{ cm}^2$$

Área del semicírculo de radio $c = 6 \text{ cm}$

$$A_3 = \pi \cdot 6^2/2 = 56,55 \text{ cm}^2$$

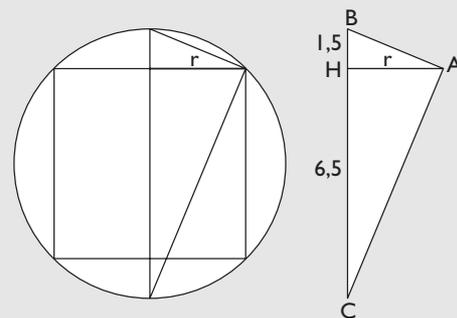
$$A_2 + A_3 = 100,53 + 56,55 = 157,08 \text{ cm}^2$$

Vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

77 Se tiene un cilindro inscrito en una esfera. Sabiendo que el radio de la esfera es $R = 4 \text{ cm}$ y la altura del cilindro es $h = 5 \text{ cm}$, halla cuánto mide el radio de la base del cilindro.

Solución:

Haciendo una sección se tiene un rectángulo inscrito en una circunferencia.



El triángulo dibujado ABC es rectángulo en A porque un lado es un diámetro y el ángulo opuesto está inscrito en una circunferencia y vale la mitad del central correspondiente: $180^\circ/2 = 90^\circ$

Aplicando el teorema de la altura:

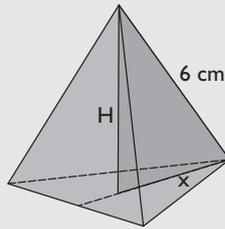
$$r^2 = 6,5 \cdot 1,5 = 9,75$$

$$r = 3,12 \text{ cm}$$

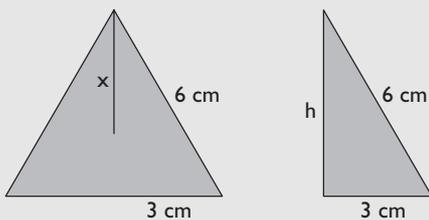
Ejercicios y problemas

78 Calcula la altura de un tetraedro de arista 6 cm

Solución:



En primer lugar tenemos que hallar la altura del triángulo equilátero de la base, para poder hallar posteriormente x



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 3^2 = 6^2$$

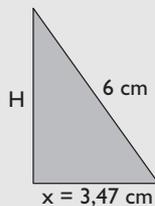
$$h = 5,20 \text{ cm}$$

Por la propiedad de las medianas de un triángulo, éstas se cortan en un punto que está a $2/3$ del vértice. Se tiene:

$$x = \frac{2}{3} \cdot h$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot 5,20 = 3,47 \text{ cm}$$

Se obtiene otro triángulo rectángulo formado por x , H y una arista:



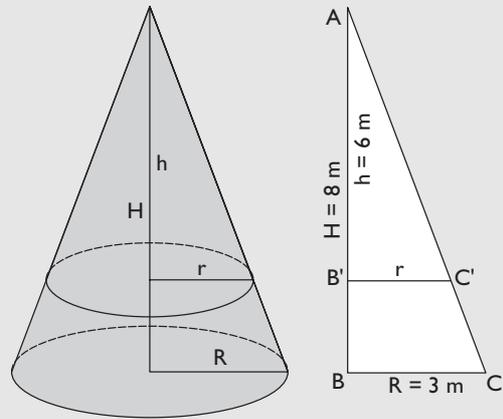
Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 3,47^2 = 6^2$$

$$H = 4,89 \text{ cm}$$

79 El radio de la base de un cono mide 3 cm y la altura mide 8 m. Se corta por un plano paralelo a la base a 2 m de la misma. ¿Qué radio tendrá la circunferencia que hemos obtenido en el corte?

Solución:



Los triángulos ABC y $AB'C'$ son semejantes porque tienen los ángulos iguales; por tanto, los lados son proporcionales:

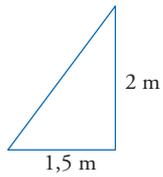
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{r}{3}$$

$$r = 2,25 \text{ m}$$

Aplica tus competencias

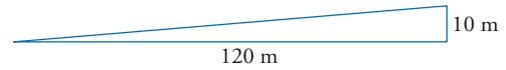
- 80** ¿Cuál es la inclinación de los rayos del sol si un mástil de 2 m proyecta una sombra sobre el suelo de 1,5 m?



Solución:

$$\text{Pendiente} = \frac{2}{1,5} = 1,33$$

- 81** Una carretera sube 10 m en 120 m medidos en horizontal. ¿Cuál es su pendiente?



Solución:

$$\text{Pendiente} = \frac{10}{120} = 0,08 = 8\%$$

Comprueba lo que sabes

- 1** Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras y pon un ejemplo de una terna pitagórica.

Solución:

El teorema de Pitágoras dice: en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

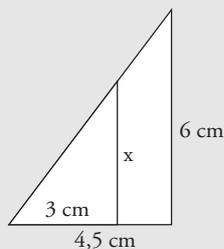
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ejemplo de terna pitagórica: 3, 4 y 5

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

- 2** Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4,5 cm y 6 cm. Dibuja otro triángulo rectángulo menor en posición de Thales tal que su cateto menor mida 3 cm. Calcula la longitud del otro cateto.

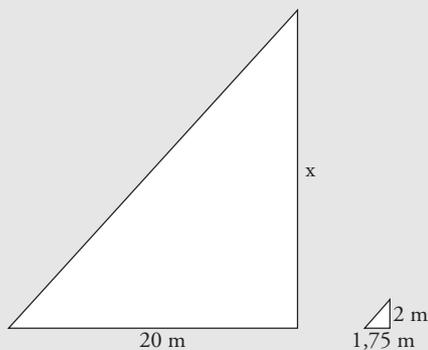
Solución:



$$\frac{6}{x} = \frac{4,5}{3} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

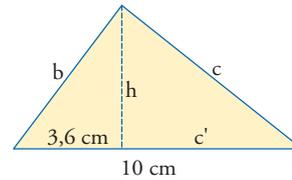
- 3** Un edificio proyecta una sombra de 20 m. El mismo día, y a la misma hora, un palo de 2 m proyecta una sombra de 1,75 m en el mismo lugar. Calcula la altura del edificio.

Solución:



$$\frac{20}{x} = \frac{1,75}{2} \Rightarrow x = 22,86 \text{ cm}$$

- 4** Calcula b, c, c' y h en el triángulo de la figura:



Solución:

$$b^2 = a \cdot b' \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot b'}$$

$$b = \sqrt{10 \cdot 3,6} = 6 \text{ cm}$$

$$c' = a - b'$$

$$c' = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ cm}$$

$$c^2 = a \cdot c' \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot c'}$$

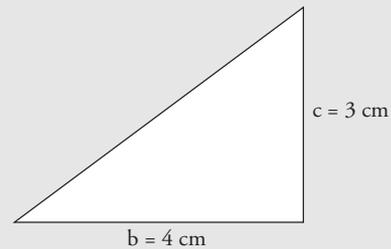
$$c = \sqrt{10 \cdot 6,4} = 8 \text{ cm}$$

$$h^2 = b' \cdot c' \Rightarrow h = \sqrt{b' \cdot c'}$$

$$h = \sqrt{3,6 \cdot 6,4} = 4,8 \text{ cm}$$

- 5** Dibuja un triángulo rectángulo en que los catetos sean proporcionales a 3 y 4. ¿Cuántos triángulos hay con estas condiciones?

Solución:



Existen infinitos triángulos en esas condiciones:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \dots$$

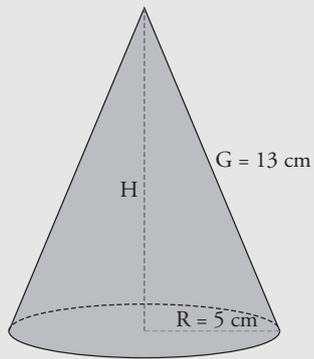
- 6** En un mapa, 5 cm corresponden a 1 200 km sobre el terreno. Halla la escala.

Solución:

Escala:

$$5:1200 = 1:240$$

- 7** Calcula el volumen de un cono en el que el radio de la base mide 5 cm y la generatriz mide 13 cm

Solución:

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$5^2 + H^2 = 13^2$$

$$H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16 \text{ cm}^3$$

- 8** Una habitación de un plano mide 4×3 cm. Si la escala es de 1:125, halla la superficie de la habitación en la realidad.

Solución:

Dimensiones:

$$4 \cdot 125 = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$$

$$3 \cdot 125 = 375 \text{ cm} = 3,75 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 5 \cdot 3,75 = 18,75 \text{ m}^2$$



Paso a paso

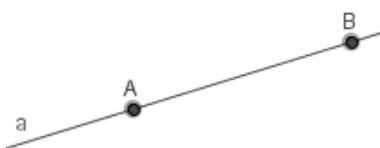
82 Dibuja tres puntos



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

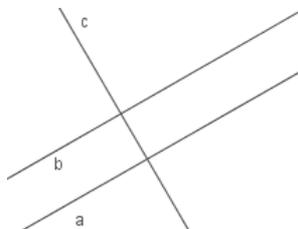
83 Dibuja una recta **a**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

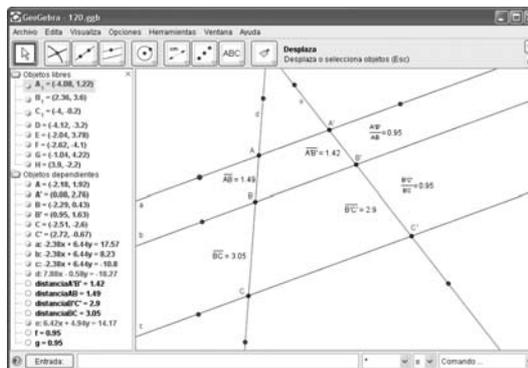
84 Dibuja dos rectas paralelas, **a** y **b**, y una perpendicular, **c**



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

85 Comprueba el teorema de Thales.



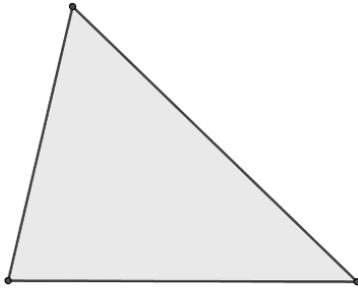
Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

86 Internet. Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

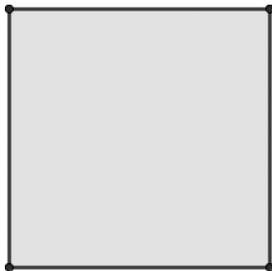
87 Dibuja un triángulo.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

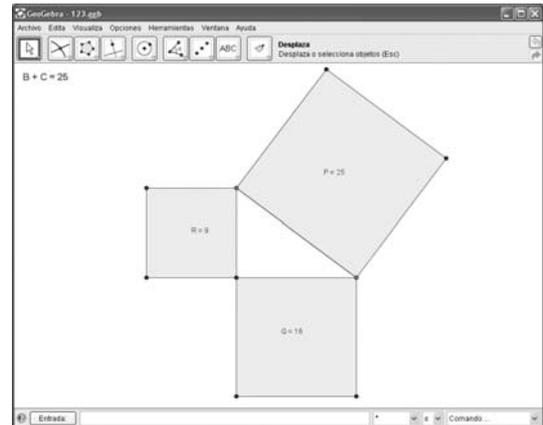
88 Dibuja un cuadrado.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

89 Comprueba el teorema de Pitágoras.



Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.