10 Funciones racionales, irracionales y exponenciales

1. Funciones racionales

PIENSA Y CALCULA

Despeja **y** de la expresión xy = 6. ¿Qué tipo de función es?

Solución:

$$y = \frac{6}{x}$$

Es una función racional que corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

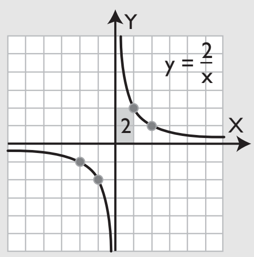
APLICA LA TEORÍA

1 Representa la gráfica de la función y = 2/x, calcula el valor de la constante de proporcionalidad e indica si ésta es creciente o decreciente.

Solución:

Tabla de valores:

x	…	–2	–1	…	1	2	…
y = 2/x	…	–1	–2	…	2	1	…



Constante de proporcionalidad

k = 2 > 0 ⇒ decreciente

2 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

Halla:

a) su dominio.

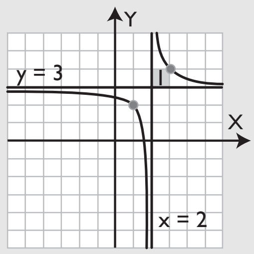
b) las ecuaciones de las asíntotas.

c) las discontinuidades.

Solución:

Haciendo la división se obtiene:

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x - 2}$$



a) Dom(f) = $\mathbb{R}$ – {2} = (–∞, 2) ∪ (2, +∞)

b) Asíntotas

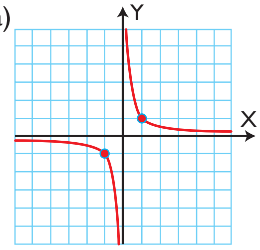
Asíntota vertical: x = 2

Asíntota horizontal: y = 3

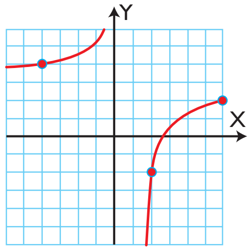
c) Es discontinua en x = 2

3 Halla la ecuación de las siguientes funciones:

a)

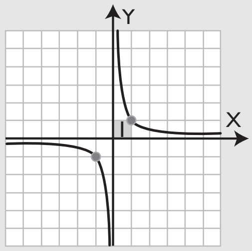


b)



Solución:

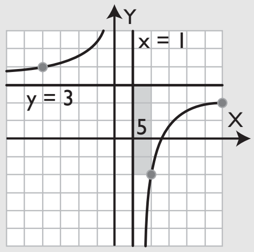
a) Se dibuja un rectángulo.



Como es decreciente, **k** es positivo.

$y = \dfrac{1}{x}$

b) Se dibujan las asíntotas y un rectángulo.



Como es creciente, **k** es negativo.

$y = 3 - \dfrac{5}{x - 1}$

$y = \dfrac{3x - 8}{x - 1}$

2. Operaciones con funciones. Funciones irracionales

PIENSA Y CALCULA

Desarrolla los siguientes polinomios y calcula su suma: $(x - 3)^2 + (x + 3)(x - 3)$

Solución:

$2x^2 - 6x$

APLICA LA TEORÍA

4 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x + 5)^2 \qquad g(x) = (x - 5)^2$

calcula:

a) $f + g$ b) $f - g$

Solución:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 + 50$

b) $(f - g)(x) = 20x$

5 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x + 1)^2 \qquad g(x) = (x + 1)(x - 1)$

calcula:

a) $f \cdot g$ b) f/g c) $\mathrm{Dom}(f/g)$

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

b) $(f/g)(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

c) $\mathrm{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

6 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 2x + 5 \qquad g(x) = x^2$

calcula:

a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = (2x + 5)^2 =$
$= 4x^2 + 20x + 25$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 5$

7 Dada $f(x) = 3x + 1$, calcula f^{-1}, representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

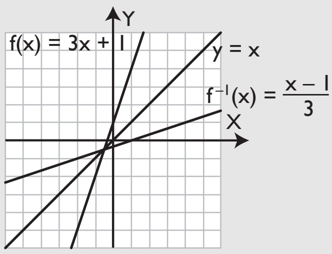
Solución:

$x = 3y + 1$

$-3y = -x + 1$

$3y = x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{3}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$



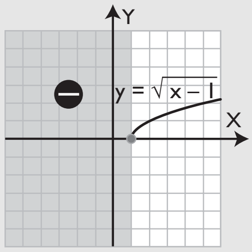
Se observa que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

8 Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x-1}$, halla su dominio y represéntala.

Solución:

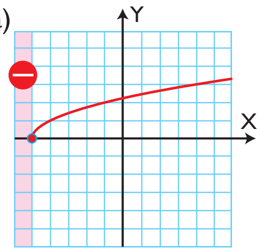
La función es irracional.

$\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$

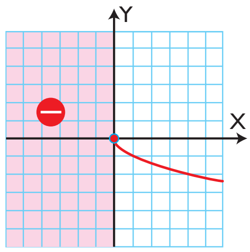


9 Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a)



b)



Solución:

a) $y = \sqrt{x+5}$

b) $y = -\sqrt{x}$

3. Funciones exponenciales

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las 10 primeras potencias enteras positivas de 2

Solución:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024

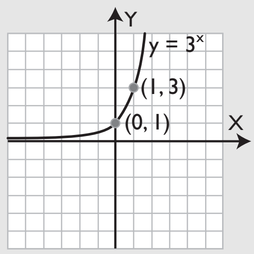
10 Representa la siguiente función:

$f(x) = 3^x$

Solución:

Tabla de valores

x	…	–2	–1	0	1	2	…
$y = 3^x$	…	1/9	1/3	1	3	9	…

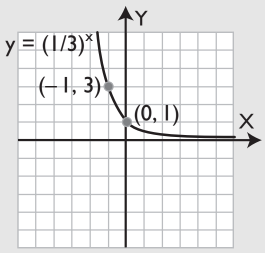


11 Representa la siguiente función:

$f(x) = (1/3)^x$

Solución:

x	…	–2	–1	0	1	2	…
$y = (1/3)^x$	…	9	3	1	1/3	1/9	…

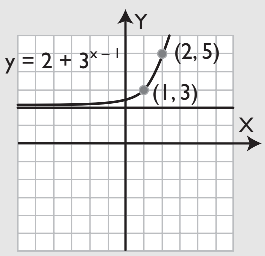


12 Representa la siguiente función:

$f(x) = 2 + 3^{x-1}$

Solución:

Es la función $y = 3^x$ trasladada 2 unidades hacia arriba y una hacia la derecha.

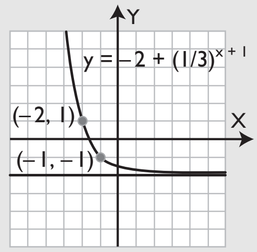


13 Representa la siguiente función:

$f(x) = -2 + (1/3)^{x+1}$

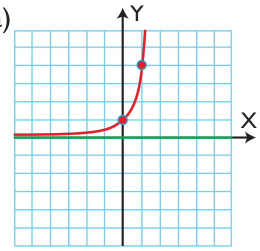
Solución:

Es la función $y = (1/3)^x$ trasladada 2 unidades hacia abajo y una hacia la izquierda.

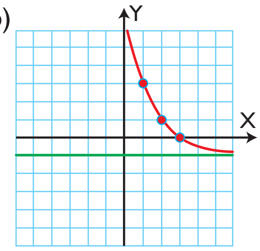


14 Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

a)



b)



Solución:

a) $y = 4^x$

b) $y = -1 + (1/2)^{x-3}$

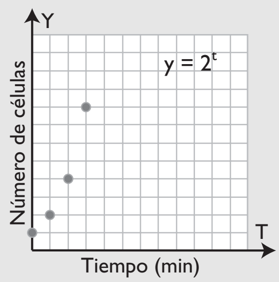
15 Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que expresa el número de células en función del tiempo, y represéntala gráficamente.

Solución:

$y = 2^t, t \geq 0$

t	0	1	2	3	4	5	…
$y = 2^t$	1	2	4	8	16	32	…

Como no puede haber fracciones de células, será una función discreta.



1. Funciones racionales

16 Representa la gráfica de la función $y = -3/x$. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad e indica si es creciente o decreciente.

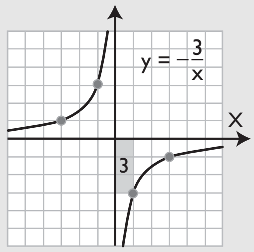
Solución:

Tabla de valores:

x	…	-3	-1	…	1	3	…
y = – 3/x	…	1	3	…	-3	-1	…

Constante de proporcionalidad

$k = -3 > 0 \Rightarrow$ creciente



17 Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 1}$

Halla:

a) su dominio.

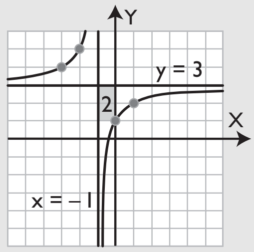
b) las ecuaciones de las asíntotas.

c) las discontinuidades.

Solución:

Haciendo la división se obtiene:

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x + 1}$$



a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

b) Asíntotas

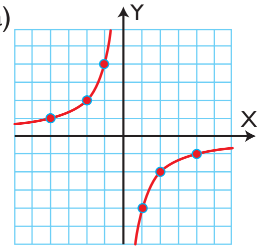
Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 3$

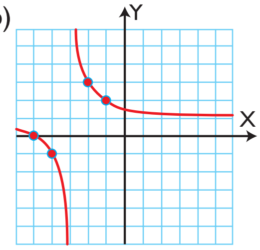
c) Es discontinua en $x = -1$

18 Halla la ecuación de las siguientes funciones:

a)

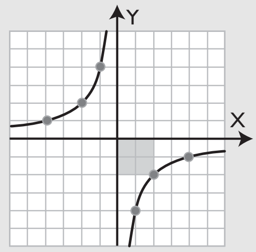


b)



Solución:

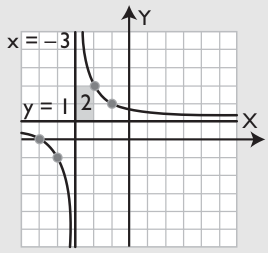
a) Se dibuja un rectángulo.



Como es creciente, **k** es negativo.

$$y = -\frac{4}{x}$$

b) Se dibujan las asíntotas y un rectángulo.



Como es decreciente, **k** es positivo.

$$y = 1 + \frac{2}{x + 3}$$

$$y = \frac{x + 5}{x + 3}$$

2. Operaciones con funciones. Funciones irracionales

19 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = (x - 3)^2$ $\quad$ $g(x) = x^2 - 9$

calcula:

a) $f + g$ $\quad$ b) $f - g$

Solución:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 - 6x$

b) $(f - g)(x) = -6x + 18$

20 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 - 16$ $\qquad$ $g(x) = (x + 4)^2$

calcula:

a) $f \cdot g$ $\qquad$ b) f/g $\qquad$ c) $\mathrm{Dom}(f/g)$

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 + 8x^3 - 128x - 256$

b) $(f/g)(x) = \dfrac{x - 4}{x + 4}$

c) $\mathrm{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$

21 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 5x - 4$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + 3x - 1$

calcula:

a) $g \circ f$ $\qquad$ b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - 4) =$

$= (5x - 4)^2 + 3(5x - 4) - 1 = 25x^2 - 25x + 3$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 1) =$

$= 5(x^2 + 3x - 1) - 4 = 5x^2 + 15x - 9$

22 Dada la siguiente función:

$f(x) = \sqrt{x + 5}$

calcula f^{-1}

Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Solución:

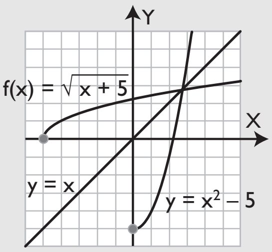
$x = \sqrt{y + 5}$

$x^2 = y + 5$

$-y = -x^2 + 5$

$y = x^2 - 5$

$f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \ge 0$



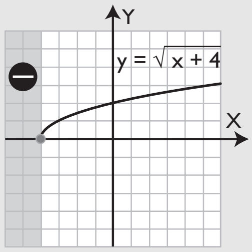
Se observa que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

23 Clasifica la función $f(x) = \sqrt{x + 4}$, halla su dominio y represéntala.

Solución:

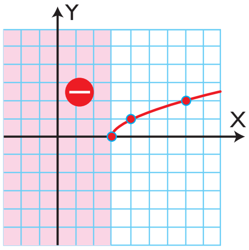
La función es irracional.

$\mathrm{Dom}(f) = [-4, +\infty)$

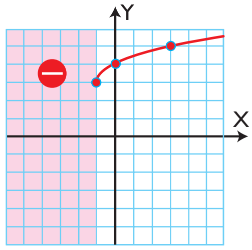


24 Halla la fórmula de las siguientes funciones:

a)



b)



Solución:

a) $y = \sqrt{x - 3}$

b) $y = 3 + \sqrt{x + 1}$

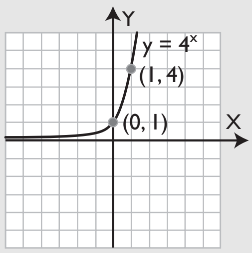
3. Funciones exponenciales

25 Representa la función $f(x) = 4^x$

Solución:

Tabla de valores

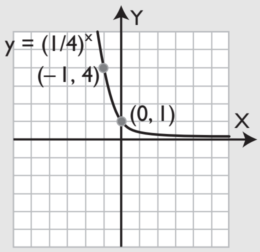
x	…	–2	–1	0	1	2	…
$y = 4^x$	…	1/16	1/4	1	4	16	…



26 Representa la función $f(x) = (1/4)^x$

Solución:

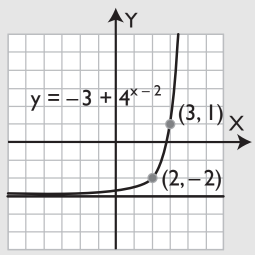
x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y = (1/4)^x$	…	16	4	1	$1/4$	$1/16$	…



27 Representa la función $f(x) = -3 + 4^{x-2}$

Solución:

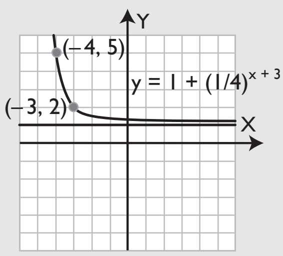
Es la función $y = 4^x$ trasladada 3 unidades hacia abajo y dos hacia la derecha.



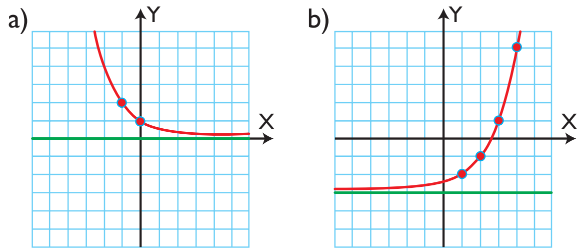
28 Representa la función $f(x) = 1 + (1/4)^{x+3}$

Solución:

Es la función $y = (1/4)^x$ trasladada 1 unidad hacia arriba y tres hacia la izquierda.



29 Halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.



Solución:

a) $y = (1/2)^x$

b) $y = -3 + 2^{x-1}$

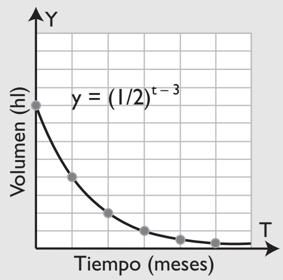
30 Un estanque contiene 8 hectolitros de agua y cada mes se gasta la mitad de su contenido. Halla la función que define la capacidad que queda en el estanque en función del tiempo y represéntala gráficamente.

Solución:

$y = (1/2)^{t-3}, t \geq 0$

t	0	1	2	3	4	5	6	…
$y = (1/2)^{t-3}$	8	4	2	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	1

Como el agua disminuye continuamente, será una función continua.



Para ampliar

31 Halla el dominio de las funciones:

a) $y = \dfrac{2x - 7}{x - 3}$

b) $y = \sqrt{x - 2}$

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) $Dom(f) = [2, +\infty)$

32 Halla el dominio de las funciones:

a) $y = 3^{x + 5}$ b) $y = \sqrt{x + 4}$

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) $Dom(f) = [-4, +\infty)$

33 Halla las discontinuidades de las funciones:

a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 4}$ b) $y = \dfrac{x - 5}{x + 3}$

Solución:

a) $x = 4$

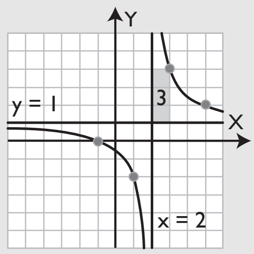
b) $x = -3$

Clasifica las siguientes funciones. Represéntalas y halla su crecimiento:

34 a) $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ b) $y = \sqrt{x - 2}$

Solución:

a) Función racional.

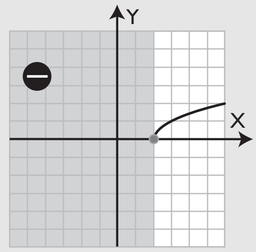


$$y = \frac{x + 1}{x - 2} \Rightarrow y = 1 + \frac{3}{x - 2}$$

Creciente (↗) : ∅

Decreciente (↘) : $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) Función irracional.



Creciente (↗) : $[2, +\infty)$

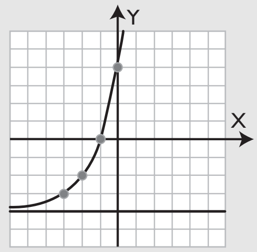
Decreciente (↘) : ∅

35 a) $y = -4 + 2^{x + 3}$

b) $y = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$

Solución:

a) Función exponencial.

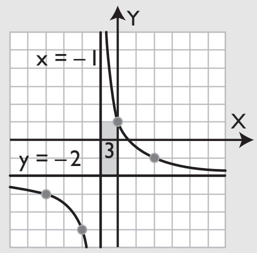


Creciente (↗) : $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (↘) : ∅

b) Función racional.

$$y = \frac{-2x + 1}{x + 1} \Rightarrow y = -2 + \frac{3}{x + 1}$$



Creciente (↗) : ∅

Decreciente (↘) : $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

36 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 7x^2 - 3x$ $g(x) = -5x^2 + 6x - 1$

calcula:

a) $f + g$ b) $f - g$

Solución:

a) $(f + g)(x) = 2x^2 + 3x - 1$

b) $(f - g)(x) = 12x^2 - 9x + 1$

37 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x - 7$ $\qquad$ $g(x) = x + 7$

calcula:

a) $f \cdot g$ $\quad$ b) f/g $\quad$ c) el dominio de f/g

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = x^2 - 49$

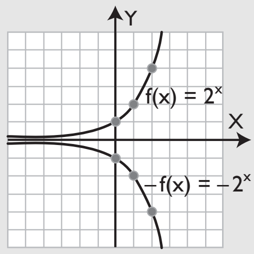
b) $(f/g)(x) = \dfrac{x - 7}{x + 7}$

c) $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{-7\} = (-\infty, -7) \cup (-7, +\infty)$

38 Representa la función $f(x) = 2^x$, multiplica dicha función por -1 y represéntala en los mismos ejes coordenados. ¿Qué observas en las gráficas de ambas funciones?

Solución:

La gráfica de la función $-f(x) = -2^x$ es la simétrica de la función $f(x) = 2^x$ respecto del eje X



39 Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x - 3$ $\qquad$ $g(x) = 5x^2 + 1$

calcula: a) $g \circ f$ $\quad$ b) $f \circ g$

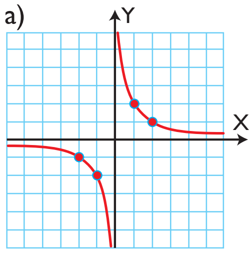
Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = 5(x - 3)^2 + 1 =$
$= 5x^2 - 30x + 46$

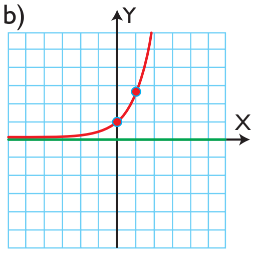
b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x^2 + 1) = 5x^2 + 1 - 3 =$
$= 5x^2 - 2$

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

40 a)

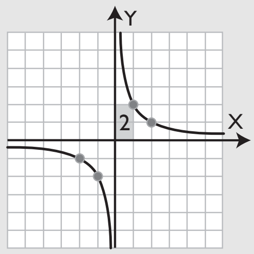


b)



Solución:

a) Función racional.

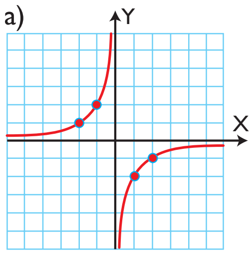


$y = \dfrac{2}{x}$

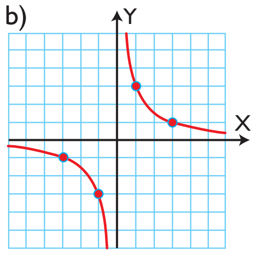
b) Función exponencial.

$y = e^x$

41 a)

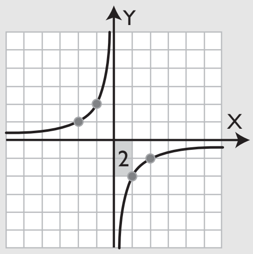


b)



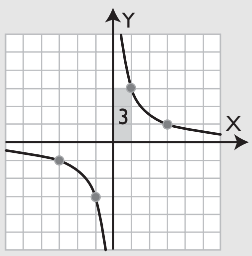
Solución:

a) Función racional.



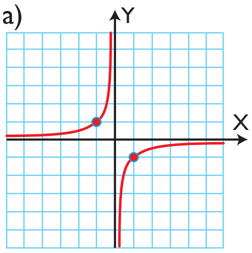
$y = -\dfrac{2}{x}$

b) Función racional.

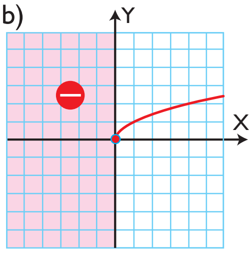


$y = \dfrac{3}{x}$

42 a)

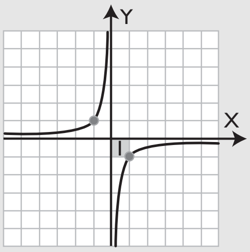


b)



Solución:

a) Función racional.

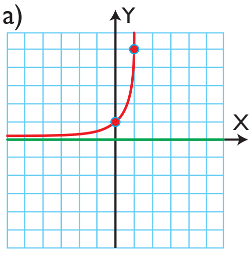


$y = -\dfrac{1}{x}$

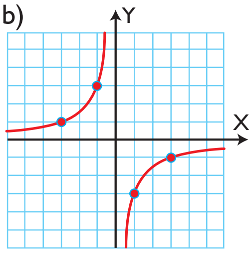
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x}$

43 a)



b)

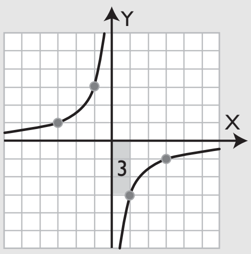


Solución:

a) Función exponencial.

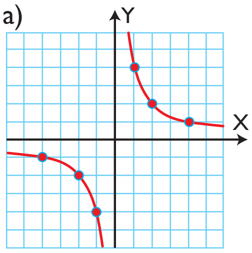
$y = 5^x$

b) Función racional.

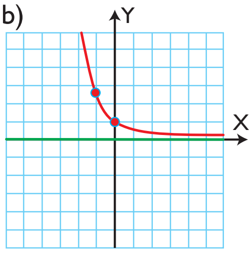


$y = -\dfrac{3}{x}$

44 a)

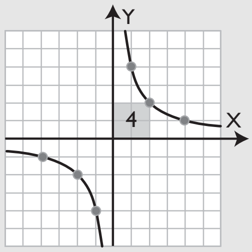


b)



Solución:

a) Función racional.

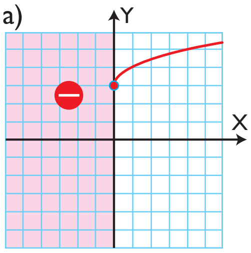


$y = \dfrac{4}{x}$

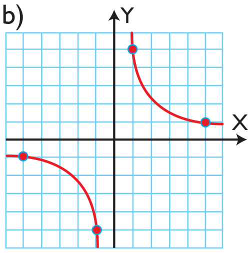
b) Función exponencial.

$y = (1/e)^x$

45 a)



b)

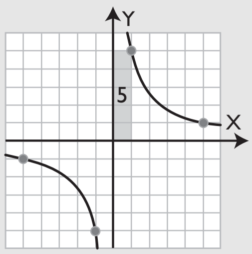


Solución:

a) Función irracional.

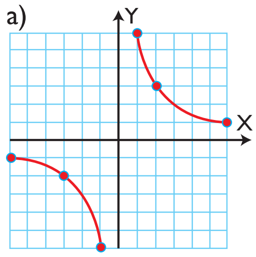
$y = 3 + \sqrt{x}$

b) Función racional.

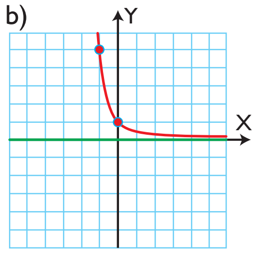


$y = \dfrac{5}{x}$

46 a)

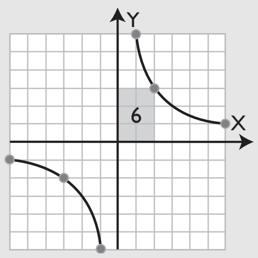


b)



Solución:

a) Función racional.

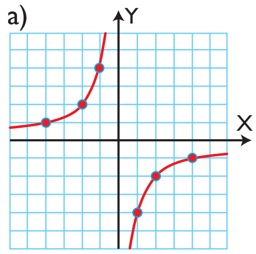


$y = \dfrac{6}{x}$

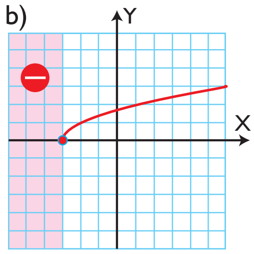
b) Función exponencial.

$y = (1/5)^x$

47 a)

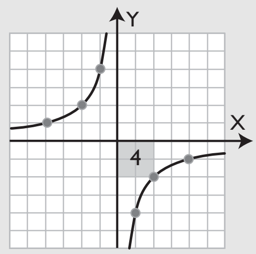


b)



Solución:

a) Función racional.



$y = -\dfrac{4}{x}$

b) Función irracional.

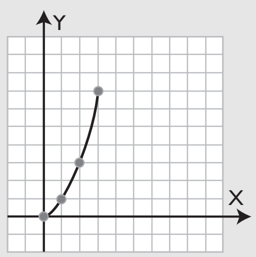
$y = \sqrt{x + 3}$

Problemas

48 Un árbol crece durante los tres primeros años, según la función $y = 2^x - 1$. Representa dicha función en los tres primeros años de vida del árbol.

Solución:

x	0	1	2	3
$y = 2^x - 1$	0	1	3	7



49 Dadas las funciones:

$f(x) = x^2 + 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$

calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 1} =$
$= \sqrt{x^2} = x$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x - 1}\right) =$
$= \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 + 1 = x - 1 + 1 = x$

c) Que las funciones f y g son una inversa de la otra.

50 Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

calcula:

a) $f \circ f$

b) ¿Qué puedes afirmar del resultado obtenido?

Solución:

a) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$

b) Que la función f es inversa de sí misma.

51 Calcula la función inversa de $f(x) = x^2 - 5$, $x \geq 0$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Solución:

$y = x^2 - 5, x \geq 0$

Se cambian las letras.

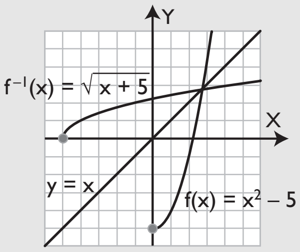
$x = y^2 - 5$

Se despeja la y

$-y^2 = -x - 5$

$y = \sqrt{x + 5}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 5}$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta y = x

52 Calcula la función inversa de $f(x) = \sqrt{x + 1}$. Representa ambas funciones en unos mismos ejes coordenados, y la recta y = x. ¿Qué observas?

Solución:

$y = \sqrt{x + 1}$

Se cambian las letras.

$x = \sqrt{y + 1}$

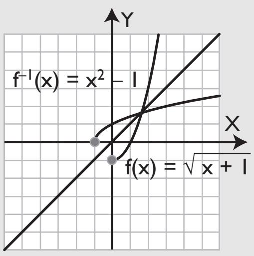
Se despeja la y

$x^2 = y + 1$

$-y = -x^2 + 1$

$y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$



Se observa que ambas gráficas son simétricas respecto de la recta y = x

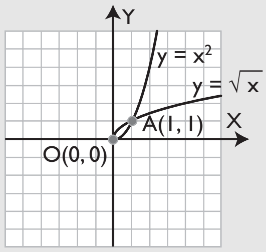
Representa en unos mismos ejes coordenados las siguientes funciones y luego halla los puntos de corte:

53 $y = x^2$ $\qquad$ $y = \sqrt{x}$

Solución:

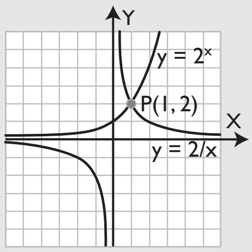
Los puntos de corte son:

O(0, 0) y A(1, 1)



54 $y = 2^x$ $\qquad$ $y = \dfrac{2}{x}$

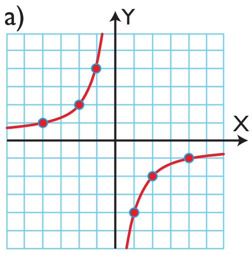
Solución:



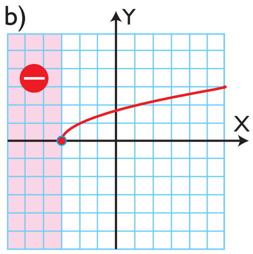
El único punto de corte es P(1, 2)

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

55 a)

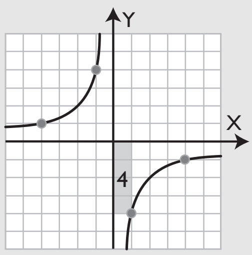


b)



Solución:

a) Función racional.

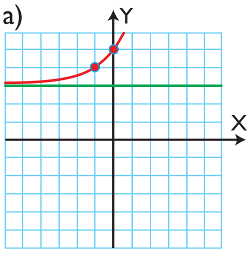


$y = -\dfrac{4}{x}$

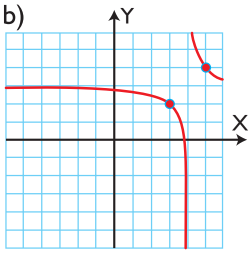
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x + 3}$

56 a)



b)

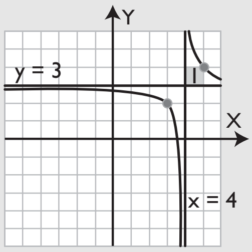


Solución:

a) Función exponencial.

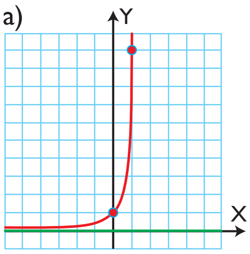
$y = 3 + 2^{x + 1}$

b) Función racional.

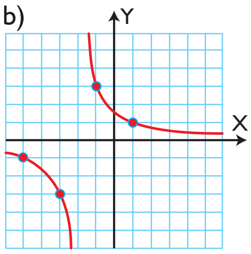


$$y = 3 + \frac{1}{x - 4} = \frac{3x - 11}{x - 4}$$

57 a)



b)

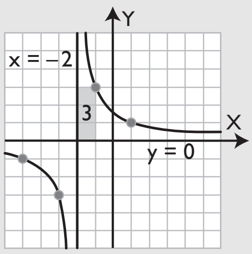


Solución:

a) Función exponencial.

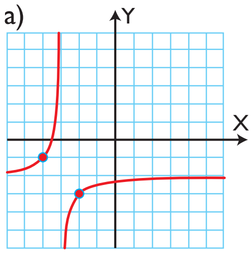
$y = 10^x$

b) Función racional.

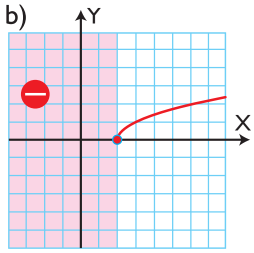


$$y = \frac{3}{x + 2}$$

58 a)

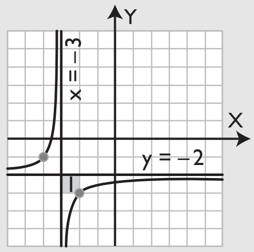


b)



Solución:

a) Función racional.

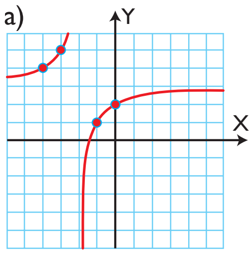


$$y = -2 - \frac{1}{x + 3} = -\frac{2x + 7}{x + 3}$$

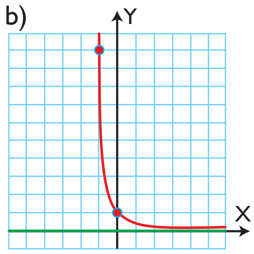
b) Función irracional.

$y = \sqrt{x - 2}$

59 a)

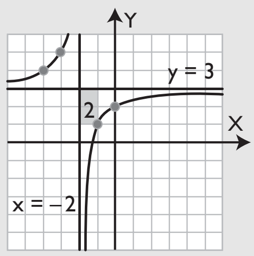


b)



Solución:

a) Función racional.

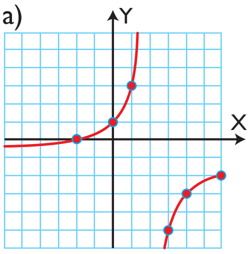


$$y = 3 - \frac{2}{x + 2} = \frac{3x + 4}{x + 2}$$

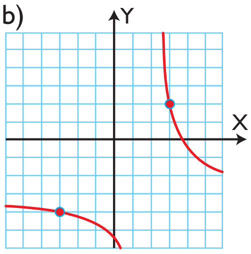
b) Función exponencial.

$y = (1/10)^x$

60 a)

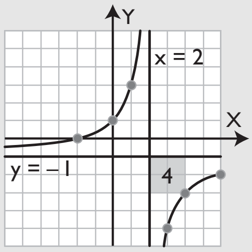


b)



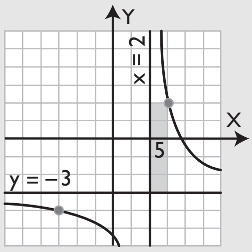
Solución:

a) Función racional.



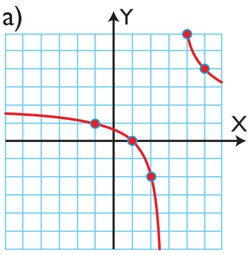
$$y = -1 - \frac{4}{x-2} = -\frac{x+2}{x-2}$$

b) Función racional.

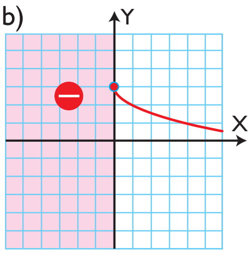


$$y = -3 + \frac{5}{x-2} = -\frac{3x-11}{x-2}$$

61 a)

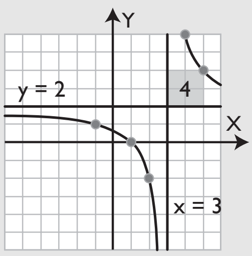


b)



Solución:

a) Función racional.



$$y = 2 + \frac{4}{x-3} = \frac{2x-2}{x-3}$$

b) Función irracional.

$y = 3 - \sqrt{x}$

62 En una granja hay pienso para alimentar 1 000 pollos durante 40 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de pollos. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$$xy = 40\,000 \Rightarrow y = \frac{40\,000}{x}$$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

63 Halla la función que calcula la longitud del lado de un cuadrado de área **x** m^2. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$y = \sqrt{x}$

Es una función irracional.

64 Los ingresos y gastos, en millones de euros, de una empresa en función del número de años que llevan funcionando vienen dados por:

$i(x) = 8x - x^2$ $\quad g(x) = 3x$

a) Calcula la función que da los beneficios de dicha empresa.

b) ¿Cuándo empieza a ser deficitaria la empresa?

Solución:

a) $b(x) = i(x) - g(x)$

$b(x) = 5x - x^2$

b) Empieza a ser deficitaria a partir de que los beneficios sean cero.

$5x - x^2 = 0$

$x(5 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$

Para $x = 0$ es cuando empieza a funcionar.

A partir de los 5 años empezará a ser deficitaria.

65 Las diferencias de presiones, que aparecen al ascender por una montaña, son la causa del mal de montaña y del dolor de oídos. Se ha probado experimentalmente que la presión viene dada por la fórmula

$y = 0{,}9^x$, donde **y** se mide en atmósferas, y **x,** en miles de metros.

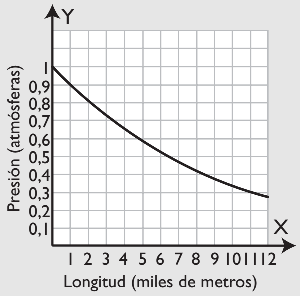
a) Representa dicha función.

b) ¿Qué presión hay a 3 000 m de altura?

c) ¿A qué altura tendremos que ascender para que la presión sea de 0,59 atmósferas?

Solución:

a) Gráfica



b) $y = 0{,}9^3 = 0{,}729$ atmósferas.

c) $0{,}9^x = 0{,}59$

$x \log 0{,}9 = \log 0{,}59$

$x = \dfrac{\log 0{,}59}{\log 0{,}9} = 5$

Altura = 5 000 m

66 La bacteria *Eberthella typhosa* se reproduce por bipartición cada hora. Si partimos de un millón de bacterias, calcula:

a) la función que expresa el número de bacterias en función del tiempo.

b) cuántas bacterias habrá al cabo de 24 horas. Da el resultado en notación científica.

c) qué tiempo tiene que transcurrir para tener 1 024 millones de bacterias.

Solución:

a) $y = 10^6 \cdot 2^x$

b) $y = 10^6 \cdot 2^{24} = 1{,}6777216 \cdot 10^{13}$

c) $10^6 \cdot 2^x = 1\,024 \cdot 10^6$

$2^x = 1\,024$

$2^x = 2^{10}$

$x = 10$ horas.

67 Un barco de vela deportivo cuesta un millón de euros. Si se devalúa un 18% anualmente, calcula:

a) la función que expresa el valor en función del número de años.

b) el valor que tendrá al cabo de 10 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que valga la mitad del precio inicial.

Solución:

a) $y = 10^6 \cdot 0{,}82^x$

b) $y = 10^6 \cdot 0{,}82^{10} = 137\,448{,}03$ €

c) $10^6 \cdot 0{,}82^x = 0{,}5 \cdot 10^6$

$0{,}82^x = 0{,}5$

$x \log 0{,}82 = \log 0{,}5$

$x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}82} = 3{,}49$ años

Aproximadamente 3 años y medio.

68 El alquiler de un piso es de 500 € mensuales. Si en el contrato se hace constar que se subirá un 3% anual, calcula:

a) la función que expresa el precio del alquiler en función del número de años.

b) el precio del alquiler al cabo de 10 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el alquiler.

Solución:

a) $y = 500 \cdot 1{,}03^x$

b) $y = 500 \cdot 1{,}03^{10} = 671{,}96$ €

c) $500 \cdot 1{,}03^x = 1\,000$

$1{,}03^x = 2$

$x \log 1{,}03 = \log 2$

$x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}03} = 23{,}45$ años.

69 Un bosque tiene 5 m^3 de madera. Si el ritmo de crecimiento es de un 10% al año, calcula:

a) la función que expresa el volumen de madera en función del número de años.

b) el volumen que tendrá al cabo de 15 años.

c) cuántos años tendrán que transcurrir para que se triplique el volumen.

Solución:

a) $y = 5 \cdot 1{,}1^x$

b) $y = 5 \cdot 1{,}1^{15} = 20{,}89\ m^3$

c) $5 \cdot 1{,}1^x = 15$

$1{,}1^x = 3$

$x \log 1{,}1 = \log 3$

$x = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}1} = 11{,}53$ años.

Para profundizar

70 Calcula la función inversa de $f(x) = \dfrac{4}{x}$. ¿Qué puedes afirmar viendo el resultado que has obtenido?

Solución:

$y = \dfrac{4}{x}$

Se cambian las letras.

$x = \dfrac{4}{y}$

Se despeja la y

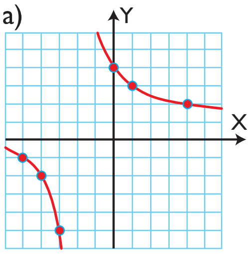
$y = \dfrac{4}{x}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$

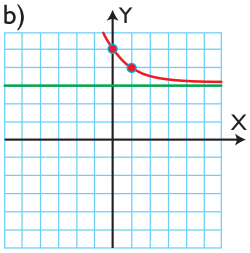
Se puede afirmar que dicha función coincide con su inversa.

Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

71 a)

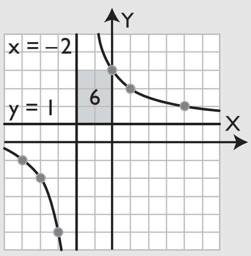


b)



Solución:

a) Función racional.

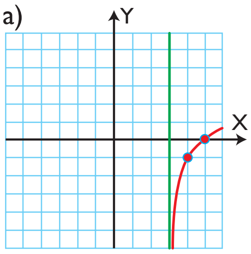


$y = 1 + \dfrac{6}{x+2} = \dfrac{x+8}{x+2}$

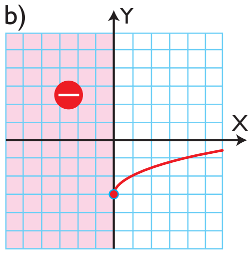
b) Función exponencial.

$y = 3 + (1/2)^{x-1}$

72 a)



b)



Solución:

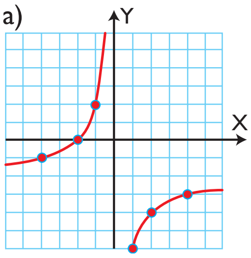
a) Función logarítmica.

$y = -1 + \log_2 (x - 3)$

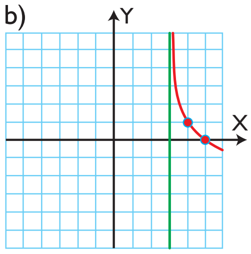
b) Función irracional.

$y = -3 + \sqrt{x}$

73 a)

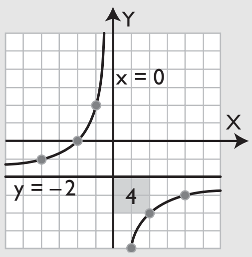


b)



Solución:

a) Función racional.

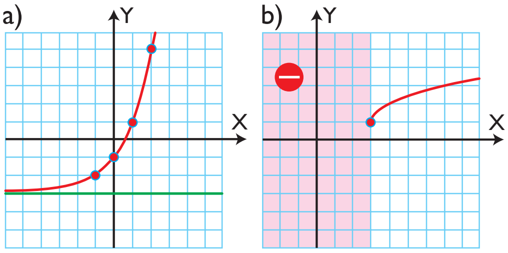


$y = -2 - \dfrac{4}{x} = -\dfrac{2x+4}{x}$

b) Función logarítmica.

$y = 1 + \log_{1/2} (x - 3)$

74 a) b)



Solución:

a) Función exponencial.

$y = -3 + 2^{x+1}$

b) Función irracional.

$y = 1 + \sqrt{x-3}$

75 Para recolectar las fresas de una huerta, 20 trabajadores tardan 5 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de trabajadores. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$xy = 100$

$y = \dfrac{100}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

76 Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, y clasifícala.

Solución:
PV = k

$P = \dfrac{k}{V}$

Es una función racional; es de proporcionalidad inversa.

77 Escribe la fórmula que relaciona la presión y el volumen dada por la ley de Boyle-Mariotte, sabiendo que para una determinada cantidad de gas P = 3 atmósferas, V = 4 litros. Represéntala gráficamente.

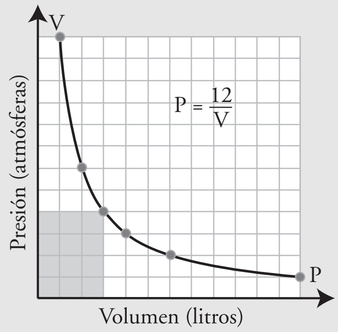
Solución:
PV = 12

$P = \dfrac{12}{V}$

Tabla de valores:

V	1	2	3	4	6	12
P	12	6	4	3	2	1

Gráfica:



Comprueba lo que sabes

1 Define función exponencial y pon un ejemplo.

Solución:

Una **función es exponencial** si la variable independiente está en el exponente. Es de la forma:

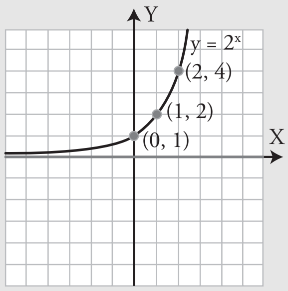
$$f(x) = a^x \text{ siendo } a > 0 \text{ y } a \; \pi \; 1$$

Ejemplo:

Represente la función $f(x) = 2^x$

Se hace una tabla de valores:

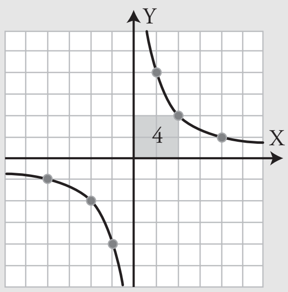
x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
y = 2^x	…	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	…



2 Clasifica y representa la función $y = 4/x$, calcula el valor de la constante de proporcionalidad, indica si la función es creciente o decreciente y di si es continua.

Solución:

Es una función racional.



$k = 4 > 0 \Rightarrow$ decreciente.

Es discontinua en $x = 0$

3 Halla la función inversa de $f(x) = x^2 - 1$, $x \geq 0$. Representa ambas funciones y la recta $y = x$. ¿Qué observas?

Solución:

Se cambian las letras.

$x = y^2 - 1$

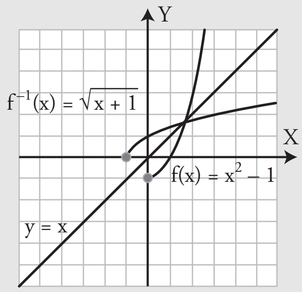
Se despeja la **y**

$-y^2 = -x - 1$

$y^2 = x + 1$

$y = \sqrt{x + 1}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$



Ambas son simétricas respecto de la recta $y = x$

4 Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2$, calcula: $g \circ f$

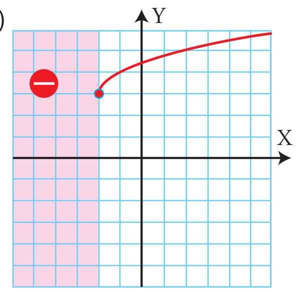
Solución:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 =$
$= 4x^2 - 12x + 9$

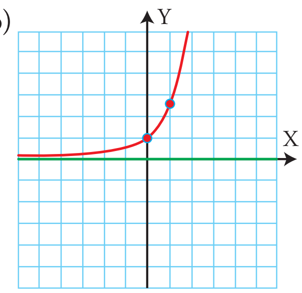
b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 - 3$

5 Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.

a)



b)



Solución:

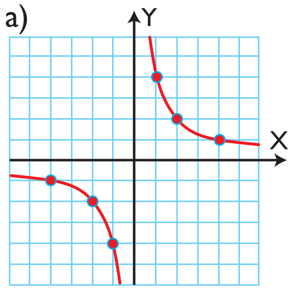
a) Función irracional.

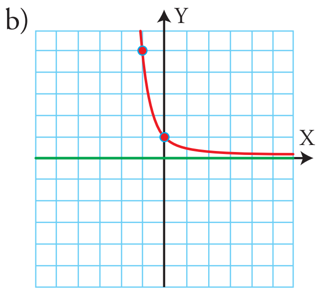
$y = 3 + \sqrt{x + 2}$

b) Función exponencial.

$y = e^x$

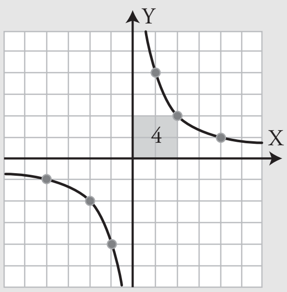
6 Clasifica y halla la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica.





Solución:

a) Función racional.



$y = \dfrac{4}{x}$

b) Función exponencial.

$y = (1/5)^x$

7 Para hacer la revista del centro, 8 alumnos tardan 6 días. Calcula la función que expresa el número de días en función del número de alumnos. Clasifica la función obtenida.

Solución:

$xy = 48 \Rightarrow y = \dfrac{48}{x}$

Es una función racional. Es de proporcionalidad inversa.

8 Una ciudad tiene un índice de crecimiento de población del 0,5%. Si en el año 2000 tenía 3 millones de habitantes, escribe la función que calcula la población en función del número de años. ¿Cuántos habitantes tendrá en el año 2050?

Solución:

$P = 3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^{t-2\,000}$

$P = 3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}005^{50} = 3{,}849677 \cdot 10^6 =$

$= 3\,849\,677$ habitantes.

Paso a paso

78 Dada la función: $y = 1 + \dfrac{2}{x - 3}$

clasifícala. Represéntala. Descríbela como traslación. Halla y representa las asíntotas. Halla el dominio, las discontinuidades y el crecimiento.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

79 Represента en los mismos ejes las funciones:

$y = x^2 - 3, x \geq 0$ $\quad y = \sqrt{x + 3}$ $\quad y = x$

¿Qué observas?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

80 Clasifica la siguiente función dada por su gráfica y mediante *ensayo-acierto* halla su fórmula o ecuación:

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

81 **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

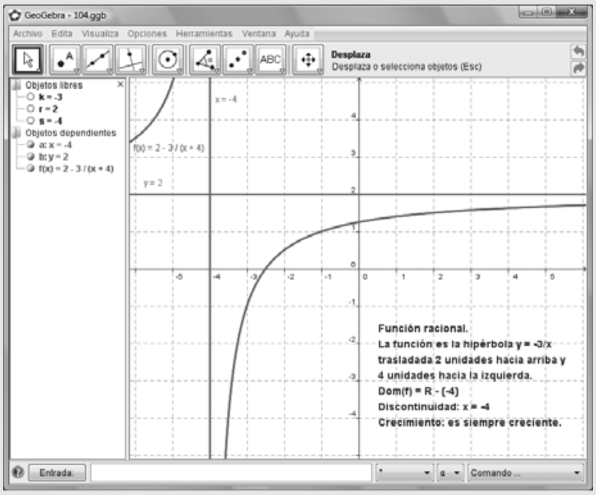
Practica

82 Dada la función:

$$y = 2 + \frac{-3}{x + 4}$$

a) clasifícala.
b) represéntala.
c) descríbela como traslación.
d) halla y representa las asíntotas.
e) halla el dominio.
f) halla las discontinuidades.
g) halla el crecimiento.

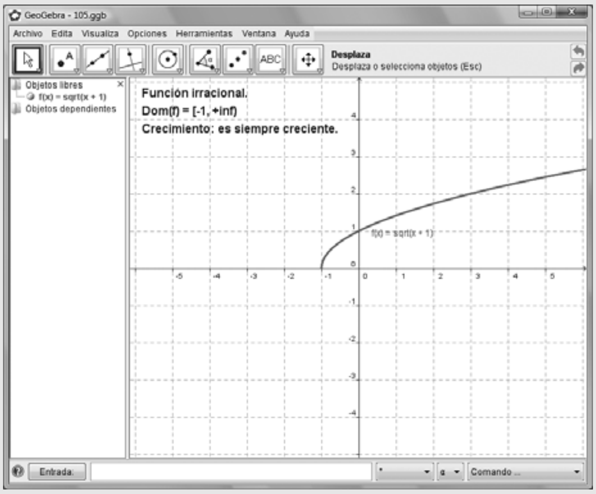
Solución:



Dadas las siguientes funciones:
a) clasifícalas.
b) represéntalas.
c) halla el dominio.
d) halla el crecimiento.

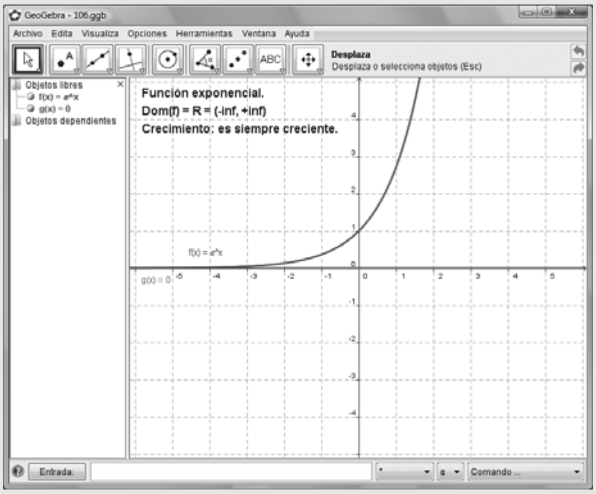
83 $y = \sqrt{x + 1}$

Solución:



84 $y = e^x$

Solución:

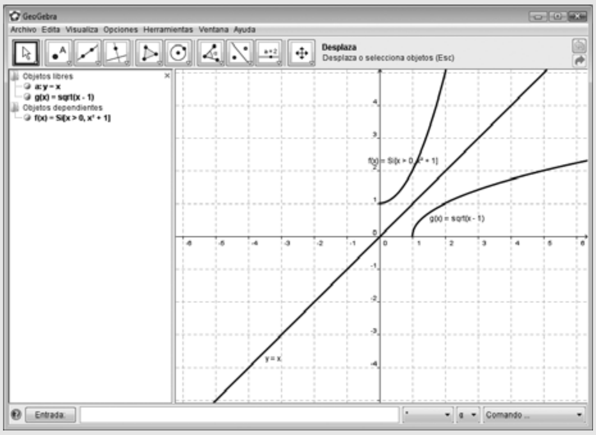


85 Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones:

$$y = x^2 + 1,\ x \geq 0$$
$$y = \sqrt{x - 1}$$
$$y = x$$

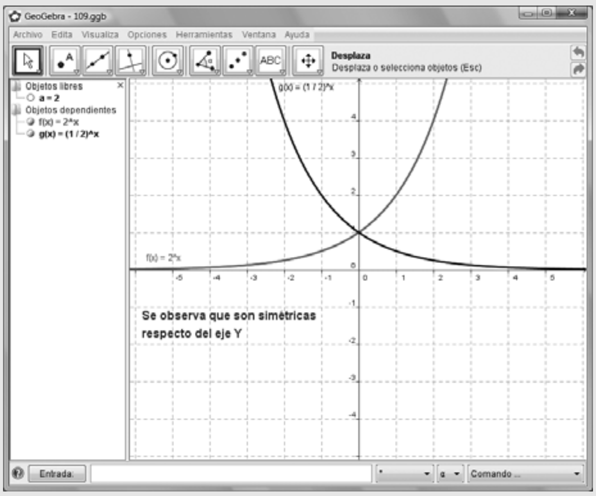
¿Qué observas?

Solución:



86 Representa en unos mismos ejes coordenados las funciones $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$. ¿Qué observas?

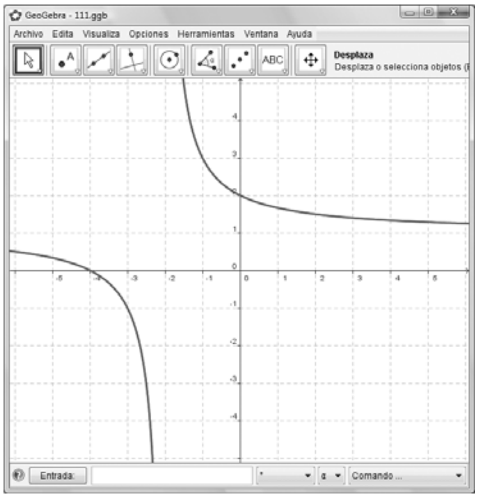
Solución:



Se observa que las funciones son simétricas respecto de la recta y = x

Clasifica y halla mediante *ensayo-acierto* la ecuación de las siguientes funciones definidas por su gráfica:

87

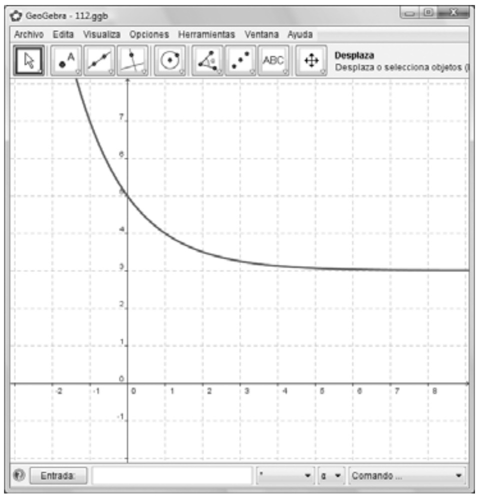


Solución:

a) Función racional.

b) $y = 1 + \dfrac{2}{x + 2}$

88

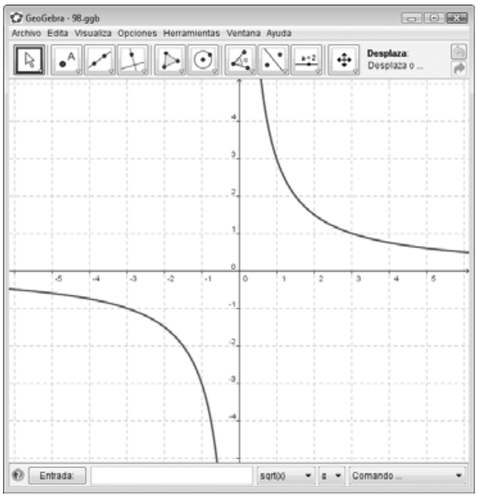


Solución:

a) Función exponencial.

b) $y = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x - 1}$

89

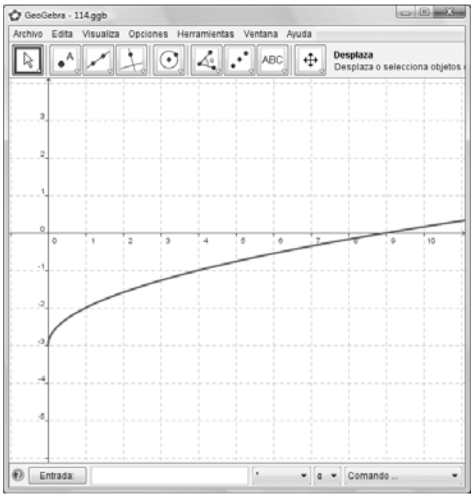


Solución:

a) Función racional.

b) $y = \dfrac{3}{x}$

90



Solución:

a) Función irracional.

b) $y = -3 + \sqrt{x}$

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Geogebra o Derive:

91 Una célula se reproduce por bipartición cada minuto. Halla la función que define el número de células y represéntala gráficamente.

Solución: