

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$

a) Calcula m para que A , B , C y D estén en un mismo plano.

b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

c) Calcula el área del triángulo A, B y C .

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB} = (2,0,2)$; $\vec{AC} = (-1,1,-1)$ y $\vec{AD} = (2,0,m-1)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2m - 2 - 4 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Luego, para $m = 3$, los cuatro puntos están en un mismo plano.

b) El plano que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y su vector normal es $\vec{AB} = (2,0,2)$.

El punto medio es: $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (1,1,2)$.

Todos los planos que tienen por vector normal el vector $\vec{AB} = (2,0,2)$, tienen de ecuación $2x + 2z + D = 0$. Como tiene que pasar por el punto $M(1,1,2)$, su ecuación será:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow 2x + 2z - 6 = 0 \Rightarrow x + z - 3 = 0$$

c) Los vectores son: $\vec{AB} = (2,0,2)$ y $\vec{AC} = (-1,1,-1)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \text{módulo}(-2,0,2) = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} u^2$$

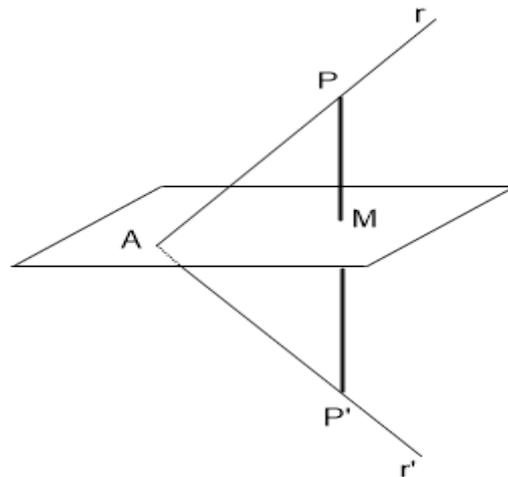
Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$

a) Calcula el punto P' , simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π .

b) Calcula la recta r' , simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2, 1, -1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2 \cdot (2 + 2t) + (-1 + t) - (5 - t) + 8 = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $x = 0$; $y = -2$; $z = 6$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que: $\frac{a+2}{2} = 0$; $a = -2$; $\frac{b-1}{2} = -2$; $b = -3$; $\frac{c+5}{2} = 6$; $c = 7$

Luego, el punto simétrico es el $P'(-2, -3, 7)$

b) Calculamos el punto de corte de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$ con el plano π

$$2 \cdot (2 - 2t) + (-1 + 3t) - (5 + t) + 8 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow A(-4, 8, 8)$$

La recta que nos piden pasa por el punto A y P' , luego: $\overline{AP'}(2, -11, -1)$

$$r' \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y-8}{-11} = \frac{z-8}{-1}$$

Considera el punto $P(-3,1,6)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r .
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -5 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$. El vector director de la recta $(1, 2, 2)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$x + 2y + 2z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(-3, 1, 6)$.

$$x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + D = 0 \Rightarrow D = -11$$

Luego, el plano que nos piden es: $x + 2y + 2z - 11 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x + 2y + 2z - 11 = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot (-5 + 2t) + 2 \cdot (-3 + 2t) - 11 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto de corte es: $M = (3, -5 + 2 \cdot 3, -3 + 2 \cdot 3) = (3, 1, 3)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(-3, 1, 6) + (a, b, c)}{2} = (3, 1, 3) \Rightarrow P' = (9, 1, 0)$$

Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de

la recta r dada por
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula las coordenadas de los posibles puntos C de r para que el triángulo ABC tenga un ángulo recto en el vértice A .

b) Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área igual a $\sqrt{2}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

Cualquier punto C , tendrá de componentes $C = (t, -2t, 0)$. Como queremos que sea un triángulo rectángulo en A , los vectores $\vec{AB} = (2, 0, 2)$ y $\vec{AC} = (t, -2t - 1, -1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer 0.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (2, 0, 2) \cdot (t, -2t - 1, -1) = 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego el punto C será: $C = (1, -2, 0)$

b) Cualquier punto D , tendrá de componentes $D = (t, -2t, 0)$.

Calculamos el área del triángulo ABD .

$$\vec{AB} = (2, 0, 2); \vec{AD} = (t, -2t - 1, -1).$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \right| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ t & -2t - 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left[(2 + 4t) \vec{i} + (2 + 2t) \vec{j} - (2 + 4t) \vec{k} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(2 + 4t)^2 + (2 + 2t)^2 + (2 + 4t)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36t^2 + 40t + 12} = \sqrt{2} \Rightarrow 9t^2 + 10t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1; t = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Luego el punto D será: $D = (-1, 2, 0)$ ó $D = \left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, 0\right)$

Sean los planos $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

a) Determina el ángulo que forman π y π' .

b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.

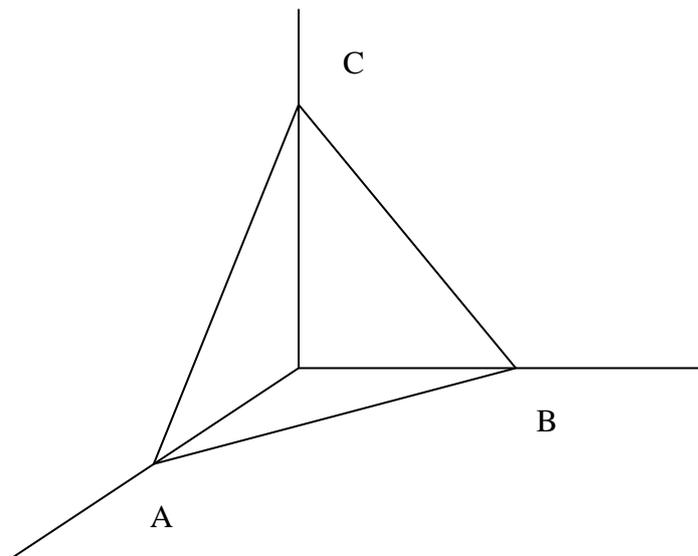
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1 = (1, 3, 2)$ y $\vec{n}_2 = (-2, 1, 3)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{\sqrt{1+9+4} \cdot \sqrt{4+1+9}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

b)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A = (5, 0, 0)$; $B = \left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$ y

$$C = \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$$

Calculamos los vectores $\vec{OA} = (5, 0, 0)$; $\vec{OB} = \left(0, \frac{5}{3}, 0\right)$ y $\vec{OC} = \left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$. El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{125}{36} u^3$$

Sean el punto $P(1, 6, -2)$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$

a) Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r .

b) Calcula la distancia entre el punto P y la recta r

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas:
$$\left. \begin{aligned} \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2} &\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

La recta pasa por el punto $A = (5, -1, 0)$ y su vector director es $\vec{u} = (6, -3, 2)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (5, -1, 0)$, el vector $\vec{u} = (6, -3, 2)$ y el vector $\vec{AP} = (-4, 7, -2)$ luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 & -4 \\ y+1 & -3 & 7 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x + 4y + 30z + 44 = 0 \Rightarrow -4x + 2y + 15z + 22 = 0$$

b) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P

$$6x - 3y + 2z + D = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 - 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + D = 0 \Rightarrow D = -16 \Rightarrow 6x - 3y + 2z + 16 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$6 \cdot (5 + 6t) - 3 \cdot (-1 - 3t) + 2 \cdot (2t) + 16 = 0 \Rightarrow 49 + 49t = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego el punto de corte es:

$$M = (5 + 6t, -1 - 3t, 2t) = (5 + 6 \cdot (-1), -1 - 3 \cdot (-1), 2 \cdot (-1)) = (-1, 2, -2)$$

La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = (-2, -4, 0)$, luego:

$$|\vec{PM}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ u}$$

Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta r , que contiene al punto $P(3,-5,4)$ y corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta s a paramétricas: $\left. \begin{array}{l} \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \\ x = 4 + 5t \\ y = 8 - 3t \\ z = 4t \end{array} \right\}$

Cualquier punto M de la recta s tiene de coordenadas $M = (4 + 5t, 8 - 3t, 4t)$. El vector $\vec{PM} = (1 + 5t, 13 - 3t, -4 + 4t)$ tiene que ser perpendicular al vector director $\vec{u} = (5, -3, 4)$ de la recta s , por lo tanto, su producto escalar debe valer cero

$$\vec{PM} \cdot \vec{u} = (1 + 5t, 13 - 3t, -4 + 4t) \cdot (5, -3, 4) = 0 \Rightarrow 5 + 25t - 39 + 9t - 16 + 16t = 0 \Rightarrow 50t - 50 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Por lo tanto el vector \vec{PM} , será: $\vec{PM} = (6, 10, 0)$ y la ecuación paramétrica de la recta r que nos

$$\text{piden es: } \left. \begin{array}{l} x = 3 + 6t \\ y = -5 + 10t \\ z = 4 \end{array} \right\}$$

Sea r la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$

a) Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto $P(4, -2, 2)$

b) Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $A = (-2 + 3t, -1 + 4t, t)$.

Como este punto equidista de O y de P , se cumple que: $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{PA}|$.

$$|\overrightarrow{OA}| = (-2 + 3t, -1 + 4t, t) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-2 + 3t)^2 + (-1 + 4t)^2 + (t)^2} = \sqrt{26t^2 - 20t + 5}$$

$$|\overrightarrow{PA}| = (-6 + 3t, 1 + 4t, -2 + t) \Rightarrow |\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(-6 + 3t)^2 + (1 + 4t)^2 + (-2 + t)^2} = \sqrt{26t^2 - 32t + 41}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{26t^2 - 20t + 5} = \sqrt{26t^2 - 32t + 41} \Rightarrow 12t = 36 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto que nos piden es: $A = (7, 11, 3)$.

b) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por el origen de coordenadas

$$3x + 4y + z + D = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow 3x + 4y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$3 \cdot (-2 + 3t) + 4 \cdot (-1 + 4t) + 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 26t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{13}$$

Luego el punto de corte es:

$$M = \left(-2 + 3 \cdot \frac{5}{13}, -1 + 4 \cdot \frac{5}{13}, \frac{5}{13} \right) = \left(-\frac{11}{13}, \frac{7}{13}, \frac{5}{13} \right)$$

Considera los puntos $B(1, 2, -3)$, $C(9, -1, 2)$, $D(5, 0, -1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B , C y D .

b) Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{BC} = (8, -3, 5)$; $\vec{BD} = (4, -2, 2)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{BC} \wedge \vec{BD}| =$$
$$\frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (4, 4, -4) = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{12} = 3'46 \text{ u}^2$$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Cualquier punto A de la recta r tendrá de coordenadas $A = (-1 - t, t, t)$. Como el ángulo recto está en A , los vectores \vec{AB} y \vec{AC} , son perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{AB} = (2 + t, 2 - t, -3 - t)$$

$$\vec{AC} = (10 + t, -1 - t, 2 - t)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (2 + t, 2 - t, -3 - t) \cdot (10 + t, -1 - t, 2 - t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 12t + 12 = 0 \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto A es: $A = (1, -2, -2)$

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

a) Halla la distancia de P a r .

b) Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r .

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P

$$x - y + D = 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$1 \cdot t - 1 \cdot (-t) - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Luego el punto de corte es: $M = (t, -t, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

La distancia es el módulo del vector $\vec{PM} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$, luego:

$$|\vec{PM}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2,12 \text{ u}$$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

La recta pasa por el punto $A=(0,0,1)$ y su vector director es $\vec{u}=(1,-1,0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(0,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,-1,0)$ y el vector $\vec{AP}=(1,0,-2)$ luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & -1 & 0 \\ z-1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 1 = 0$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ y s la recta dada por $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = s \\ z = -1 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (1, 1, t - 2)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1 + s, s, -1)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (s, s - 1, 1 - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow (s, s - 1, 1 - t) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow (s, s - 1, 1 - t) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow s + s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, -1) ; B = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (1, 1, -1)$ y $\vec{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0'7071 u$$

Considera el plano π de ecuación $mx + 5y + 2z = 0$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcula m y n en el caso en el que la recta r es perpendicular al plano π .

b) Calcula m y n en el caso en el que la recta r está contenida en el plano π .

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, luego, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{m}{3} = \frac{5}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow m = 3 ; n = 5$$

b) Para que la recta r esté contenida en el plano π , el punto de la recta debe pertenecer al plano y el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

Sustituimos el punto en la ecuación del plano.

$$m \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = 2$$

El producto escalar de los vectores $(m, 5, 2)$ y $(3, n, 2)$ debe valer cero, luego:

$$m \cdot 3 + 5 \cdot n + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 3m + 5n + 4 = 0 \Rightarrow 6 + 5n + 4 = 0 \Rightarrow n = -2$$