

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta r dada por $\left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .

b) Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta r a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u} = (0, -2, 1)$.

Todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-2y + z + D = 0$. Como queremos que pase por el punto P :

$$-2y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2y + z - 5 = 0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-2y + z - 5 = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-2t) + t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de corte es: $M = (1, -2, 1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM} = (0, -2, -4)$, es decir:

$$\left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \text{ u}$$

Si llamamos $P' = (a, b, c)$, se cumple que el punto M es el punto medio del segmento PP' , luego:

$$\frac{1+a}{2} = 1 \Rightarrow a = 1 ; \quad \frac{0+b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4 ; \quad \frac{5+c}{2} = 1 \Rightarrow c = -3$$

Por lo tanto, el simétrico es: $P' = (1, -4, -3)$

Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta s a paramétricas y calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1, 1, 1) \\ \vec{u} = (2, -1, 0) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1, 0, -1) \\ \vec{v} = (-2, 1, 0) \end{cases}$$

Como las componentes de los dos vectores directores de las rectas son proporcionales, los vectores son paralelos y las rectas paralelas, por lo tanto, las rectas son coplanarias.

El plano que nos piden viene definido por el punto A y los vectores $\overline{AB} = (-2, -1, -2)$ y \vec{u} . Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 4y + 4z + 2 = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z + 1 = 0$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ a la recta s . Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (1, 1, 1)$

$$-2x + y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + 1 = 0 \\ x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(-1 - 2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow 5t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{5}$$

Luego, el punto de corte es el $M = \left(-1 + \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$. La distancia entre las rectas

viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{5} - 1, -\frac{3}{5} - 1, -1 - 1\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -2\right)$, luego:

$$d = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}} \quad u$$

La distancia entre las rectas es el lado del cuadrado, luego su área será: $S = d^2 = \frac{36}{5} \quad u^2$

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo

$$A(1,0,-1), B(3,2,1) \text{ y } C(-7,1,5)$$

a) Determina las coordenadas del punto D .

b) Calcula el área del paralelogramo.

c) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal AC es: $M = \left(\frac{1-7}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = \left(-3, \frac{1}{2}, 2 \right)$

El punto medio de la diagonal BD , también es M , luego si llamamos $D(a, b, c)$, se tiene que cumplir:

$$M = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = \left(-3, \frac{1}{2}, 2 \right) \Rightarrow D(-9, -1, 3)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB} = (2, 2, 2)$ y $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$ y aplicamos la fórmula del área del paralelogramo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (10, -28, 18)$$

$$S = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}| = \sqrt{10^2 + 28^2 + 18^2} = \sqrt{1208} = 34,75 \text{ u}^2$$

c) El plano viene definido por el punto $A = (1, 0, -1)$ y los vectores $\vec{AB} = (2, 2, 2)$ y $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -10 \\ y & 2 & -1 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 14y + 9z + 4 = 0$$

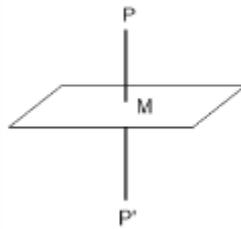
Se considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x - y + z + 1 = 0$.

a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π .

b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto P , es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2, -1, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2 \cdot (1 + 2t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (-1 + t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Luego, las coordenadas del punto M son: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento PP' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto P' , se debe verificar que: $\frac{a+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$; $\frac{b+0}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$; $\frac{c-1}{2} = -\frac{4}{3} \Rightarrow c = -\frac{5}{3}$

Luego, el punto simétrico es el $P' \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

b) Calculamos el vector director de la recta $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (2, 1, 0)$

El plano que nos piden viene definido por el punto $P(1,0,-1)$, el vector $\vec{u} = (2, 1, 0)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 4z - 5 = 0$$

Sea r la recta dada por $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ y sea s la recta definida por $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas r y s se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

b) Calcula la distancia entre r y s .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) La recta r pasa por el punto $A=(1,-1,0)$ y su vector director es $\vec{u}=(-1,0,1)$. La recta s pasa por el punto $B=(2,2,2)$ y su vector director es $\vec{v}=(1,0,2)$. Las rectas se cruzan si el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}=(-1,0,1)$, $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{AB}=(1,3,2)$ es tres. Vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3+6=9 \neq 0 \Rightarrow \text{El rango vale 3 y las rectas se cruzan.}$$

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+s \\ y=2 \\ z=2+2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A=(1-t,-1,t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B=(2+s,2,2+2s)$. El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(1+s+t,3,2+2s-t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -1-s-t+2+2s-t=0 \Rightarrow 1+s-2t=0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1+s+t+4+4s-2t=0 \Rightarrow 5+5s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=0$; $s=-1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(1,-1,0) ; B=(1,2,0)$$

La recta perpendicular viene definida por el punto $A=(1,-1,0)$ y el vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, luego:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, por lo tanto: $d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{9} = 3$

Considera un rectángulo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$.

Sabiendo que la recta r que contiene a los puntos C y D pasa por el origen de coordenadas se pide:

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de r .

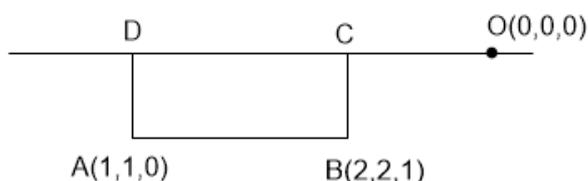
b) Calcula el área del triángulo ABC .

c) Determina las coordenadas del punto D .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a)



La recta que pasa por C y D tiene el mismo vector director que la recta que pasa por A por B , luego, su ecuación

$$\text{es: } r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

b) Con el punto $B(2,2,1)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow x + y + z - 5 = 0$$

Las coordenadas del punto C son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow t + t + t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow C = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (1,1,1)$; $\vec{AC} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{ módulo } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{ módulo } (1, -1, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} u^2$$

c) Con el punto $A(1,1,0)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Las coordenadas del punto D , son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow t + t + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 1$.

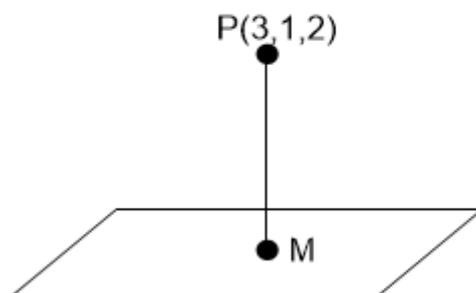
a) Halla el punto de π más próximo al punto $(3,1,2)$.

b) Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto P es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1, 2, 1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $1 \cdot (3 + t) + 2 \cdot (1 + 2t) + 1 \cdot (2 + t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto M son: $M = (3 + t, 1 + 2t, 2 + t) = (2, -1, 1)$

b) El plano paralelo tendrá de ecuación: $x + 2y + z = D$. Calculamos los puntos de corte con los ejes

coordenados: $A = (D, 0, 0)$; $B = \left(0, \frac{D}{2}, 0\right)$; $C = (0, 0, D)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = \left(-D, \frac{D}{2}, 0\right)$; $\vec{AC} = (-D, 0, D)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo: $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| =$

$$= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -D & \frac{D}{2} & 0 \\ -D & 0 & D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left(\frac{D^2}{2}, D^2, \frac{D^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D^4}{4} + D^4 + \frac{D^4}{4}} = \sqrt{6} \Rightarrow D = \pm 2$$

Luego, la ecuación del plano paralelo es: $x + 2y + z = 2$ ó $x + 2y + z = -2$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,-1,1)$ y s la recta dada por

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por B y es perpendicular a s .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1,1,0) \\ \vec{u} = \vec{AB} = (2,-2,1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1,0,-1) \\ \vec{v} = (-2,1,-1) \end{cases}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $\vec{u} = (2,-2,1)$ y $\vec{v} = (-2,1,-1)$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -2 \\ y-0 & -2 & 1 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2z=0$$

b) El vector normal del plano es el vector director de s , luego: $-2x + y - z + D = 0$

y queremos que pase por el punto B :

$$-2 \cdot 3 - 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 8$$

El plano que nos piden es: $-2x + y - z + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 8 - 2t + s \end{cases}$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \quad y \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la ecuación general del plano π'

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+3+z+6+y=0 \Rightarrow x+y+z+9=0$$

Pasamos la recta r a paramétricas $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 3t \end{cases}$ y, por tanto, podemos tomar como punto

genérico de la recta $P = (1+2t, -1+t, 3t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π' , tenemos que $d(P, \pi) = d(P, \pi')$, luego:

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \Rightarrow \frac{|1+2t-1+t+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+2t-1+t+3t+9|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3+6t|}{\sqrt{3}} = \frac{|9+6t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3+6t| = |9+6t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$3+6t = 9+6t \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$3+6t = -9-6t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow P = (-1, -2, -3)$$

Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta r dada por $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula m en el caso en que la recta r es perpendicular al plano π .

b) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π ?

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta $\vec{u} = (-3, 2, -1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (6, -m, 2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{6}{-3} = \frac{-m}{2} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = 4$$

b) Pasamos la recta a implícitas

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = -3y-3 \\ -x+1 = -3z-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las tres ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \\ 6x-my+2z = 1 \end{cases}$$

La recta está contenida en el plano si $Rango(A) = Rango(M) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & -m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 54 + 6 + 6m = 0 \Rightarrow m = -10 \Rightarrow \begin{cases} m = -10 \Rightarrow Rango A = 2 \\ m \neq -10 \Rightarrow Rango A = 3 \end{cases}$$

$$m = -10 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -7 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+6F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 & -15 \\ 0 & 10 & 20 & -41 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-5F_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, no hay ningún valor de m para el cuál la recta esté contenida en el plano.

Considera el punto $A(1, -1, 1)$ y la recta r dada por
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} .$$

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r .

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A .

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por A . El vector director de la recta $(2, -1, 0)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x - y + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(1, -1, 1)$.

$$2x - y + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Luego, el plano es: $2x - y - 3 = 0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x - y - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1 + \frac{4}{5}, 1 - \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $A' = (a, b, c)$, se cumple que:

$$\frac{(1, -1, 1) + (a, b, c)}{2} = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) \Rightarrow A' = \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)$$

b) De la recta r sabemos que: $B(1, 1, 1)$ y $\vec{u} = (2, -1, 0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{AB} = (0, 2, 0)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4z - 4 = 0 \Rightarrow z - 1 = 0$$

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 + s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1 + s, 3 + s, -s)$

El vector \vec{AB} tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1 + s - t, 3 + s - t, -s - t)$

Como el vector \vec{AB} tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t - s - t = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t + s + t = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 1$; $s = -1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, 1) \quad ; \quad B = (0, 2, 1)$$

La distancia viene dada por el módulo del vector \vec{AB}

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2} \, u$$