**1.** La ecuación de una onda armónica que se propaga por una cuerda es:

$$y\ (x,\ t) = 0{,}08 \cos\ (16\ t - 10\ x)\ (S.I.)$$

a) Determine el sentido de propagación de la onda, su amplitud, periodo, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Explique cómo se mueve a lo largo del tiempo un punto de la cuerda y calcule su velocidad máxima.

**2.** Un movimiento armónico simple viene descrito por la ecuación

$$x\ (t) = A \text{ sen } (\omega\ t + \delta).$$

a) Escriba la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y explique cómo varían a lo largo de una oscilación.
b) Deduzca las expresiones de las energías cinética y potencial en función de la posición y explique sus cambios a lo largo de la oscilación.

**3.** a) Explique qué es una onda armónica y escriba su ecuación.
b) Una onda armónica es doblemente periódica. ¿Qué significado tiene esa afirmación? Haga esquemas para representar ambas periodicidades y coméntelos.

**4.** La ecuación de una onda es:

$$y\ (x,\ t) = 0{,}16 \cos\ (0{,}8\ x) \cos\ (100\ t)\ (S.\ I.)$$

a) Con la ayuda de un dibujo, explique las características de dicha onda.
b) Determine la amplitud, longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de las ondas cuya superposición podría generar dicha onda.

**5.** a) Defina qué es una onda estacionaria e indique cómo se produce y cuáles son sus características. Haga un esquema de una onda estacionaria y coméntelo.
b) Explique por qué, cuando en una guitarra se acorta la longitud de una cuerda, el sonido resulta más agudo.

**6.** Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.
a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2$ cm $s^{-2}$, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.
b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

**M.A.S. Y MOV ONDULATORIO FCA 07 ANDALUCÍA**

**1.-** $y(x, t) = 0{,}08 \cos(16\,t - 10\,x)$ (S.I.)

**a)** Comparando la ecuación anterior con la que representa un onda armónica que se desplaza hacia la derecha

$$y(x, t) = A \cos(\omega\, t - k\, x)$$

vemos que efectivamente dicha onda se desplaza hacia la derecha, también observamos que su amplitud es de 0,08 m ($A = 0{,}08$ m).

Para calcular el periodo partimos del valor de la frecuencia angular ($\omega = 16\ s^{-1}$) que también sabemos por comparación

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{16\,s^{-1}} = 0{,}39\,s$$

partiendo del valor del número de onda ($k = 10\ m^{-1}$) calculamos la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\,m^{-1}} = 0{,}628\,m$$

por último su velocidad de propagación

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}628\,m}{0{,}39\,s} = 1{,}61\,ms^{-1}$$

**b)** Un punto de la cuerda se mueve con un movimiento armónico simple en dirección perpendicular al sentido de propagación (onda transversal), su velocidad de oscilación viene dada por la siguiente expresión

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}08 \cdot 16 \cdot sen\left(16t - 10x\right) = -1{,}28 \cdot sen\left(16t - 10x\right)\ ms^{-1}$$

la velocidad será máxima cuando el seno alcance su máximo valor es decir 1

$$v_{\max} = 1{,}28\,ms^{-1}$$

**2.-** $x(t) = A\ sen(\omega\, t + \delta)$

**a)** La velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos\left(\omega t + \delta\right)$$

la aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A sen\left(\omega t + \delta\right)$$

puesto que $x = A sen\left(\omega t + \delta\right)$ $\qquad a = -\omega^2 x$

**2.- a)** (continuación) A lo largo de una oscilación la velocidad es máxima ($v_{max} = \omega A$) en el centro y cero en los extremos donde cambia de sentido. La aceleración ($a = -\omega^2 x$) es cero en el centro y máxima en los extremos ($a_{max} = \omega^2 A$)

**b)** Las fuerzas restauradoras que obedecen a la ley de Hooke son conservativas. De ese modo es posible relacionar el trabajo que realizan dichas fuerzas con la variación de energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

Consideremos un cuerpo unido a un resorte que oscila horizontalmente sin fricción. El trabajo realizado por la fuerza al desplazar el cuerpo desde una posición x hasta la posición de equilibrio será

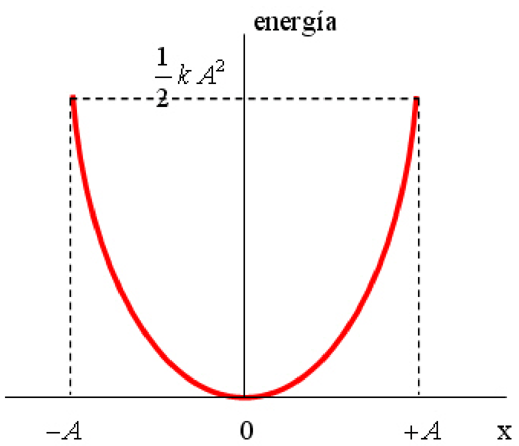
$$W = \int_x^0 -k\,x\,dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_x^0 = \frac{1}{2}k\,x^2$$

dado que $W = -\Delta E_p$ $\qquad \frac{1}{2}k\,x^2 = E_p(x) - E_p(0)$

La energía potencial del oscilador viene dada por

$$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$$

y varía de forma periódica entre un valor mínimo en la posición de equilibrio ($E_p = 0$) y un valor máximo en los extremos ($E_p = \frac{1}{2}k\,A^2$) como vemos en la figura




Para obtener la expresión de la energía cinética del oscilador, partimos de la ecuación de la velocidad

$$v = \frac{d\,x}{d\,t} = -\omega\,A sen(\omega t + \delta) = -\omega\,A\sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \delta)}$$

introduciendo A en la raíz y teniendo en cuenta que $x = A\cos(\omega t + \delta)$ obtenemos

**2.- b)** (continuación)

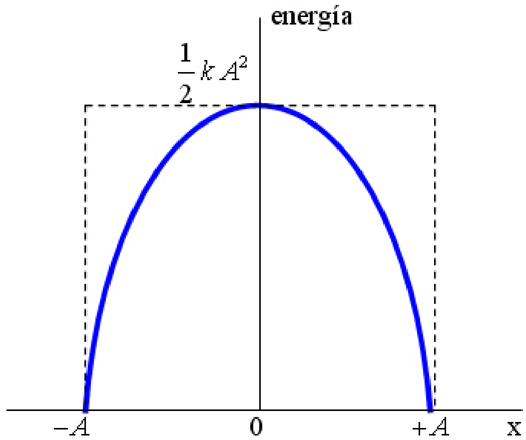
$$v = -\omega\sqrt{A^2 - A^2\cos^2(\omega t + \delta)} = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

sustituyendo en la ecuación de la energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

como $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ nos queda $E_c = \dfrac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$

La energía cinética de un oscilador armónico varía periódicamente entre un valor mínimo en los extremos ( $E_c = 0$ ) y un valor máximo en la posición de equilibrio ( $E_c = \frac{1}{2}kA^2$ ) como vemos en la figura




**3.- a)** Existe un tipo muy importante de ondas que se denominan **ondas armónicas**, debido a que la función de onda que las describe es una función sinusoidal (seno o coseno) de x (dirección de propagación) y t (tiempo). La expresión de dichas ondas puede ser de dos tipos:

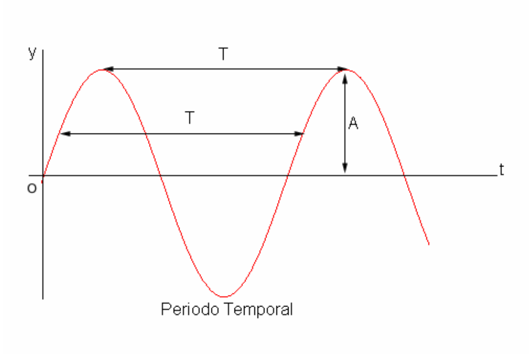
$$y(x,t) = A\mathrm{sen}(kx \pm \omega t)$$

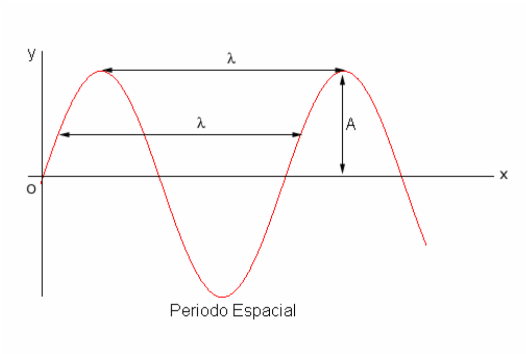
$$y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t)$$

donde A es la amplitud que caracteriza a la onda, k es una constante que se denomina número de onda y ω es la frecuencia angular del oscilador armónico que produce la perturbación.

**b)** La doble periodicidad es una de sus características principales de los fenómenos ondulatorios.
En efecto. Sabemos que la función seno es una función periódica. Al estudiar el M.A.S., como la posición o elongación sólo dependía del tiempo, existía un periodo temporal, T.

**3.- b)** (continuación) En este caso, hemos visto que el valor de la perturbación depende del instante, pero también del punto en que se analice la perturbación. Por lo tanto, habrá un segundo periodo ESPACIAL, λ, que se denomina longitud de onda. La longitud de onda, representa, por tanto, la distancia recorrida por la perturbación en un periodo T, es decir: $\lambda = v \cdot T$

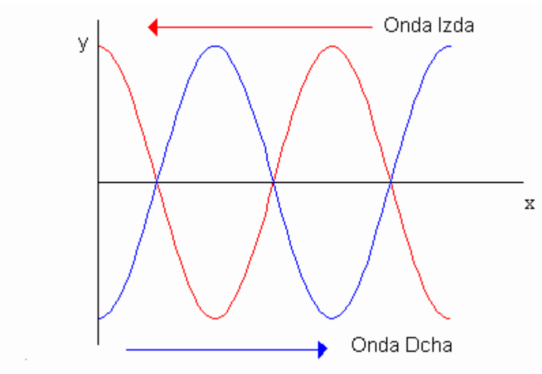



**4.-** y (x, t) = 0,16 cos (0,8 x) cos (100 t) (S. I.)

**a)** Esta ecuación represente una onda estacionaria producida por la superposición de dos ondas armónicas que viajan en sentido opuesto y que tienen por ecuaciones

$$y_1 = A\cos(k\,x + \omega t) \qquad \text{e} \qquad y_2 = A\cos(k\,x - \omega t)$$




aplicando el principio de superposición

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos(k\,x + \omega t) + \cos(k\,x - \omega t)\right]$$

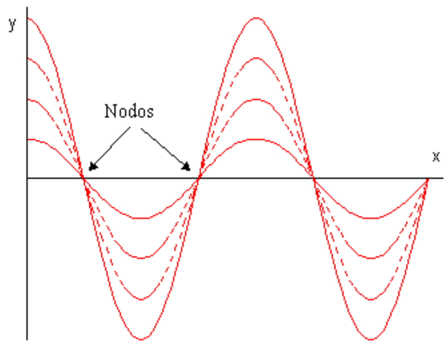
como $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$ y $\frac{a+b}{2} = k\,x$ $\frac{a-b}{2} = \omega t$

nos queda la siguiente ecuación

$$y = 2A\cos(k\,x)\cos(\omega t)$$

que es del tipo de la del ejercicio

**4.- a)** (continuación) Esta onda estacionaria tiene un vientre en el origen (x = 0) ya que para t = 0 y x = 0, y = 2A




**b)** Comparando la ecuación que nos da el ejercicio con la obtenida en el apartado anterior obtenemos:

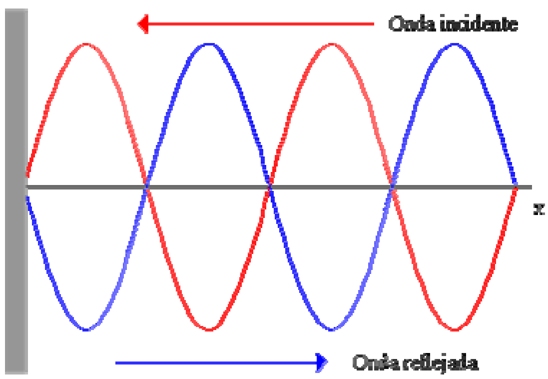
$$2A = 0{,}16 \qquad A = \frac{0{,}16}{2} = 0{,}08\, m$$

$$k = 0{,}8\, m^{-1} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 7{,}85\, m$$

$$\omega = 100\, rad\, s^{-1} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = 15{,}9\, s^{-1}$$

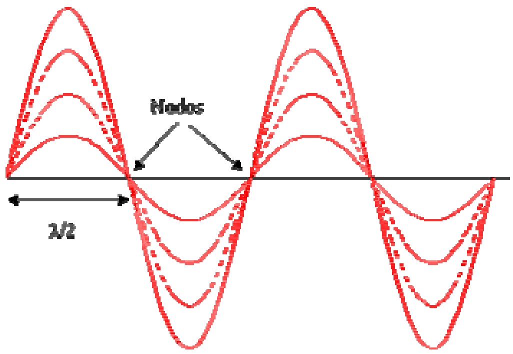
$$v = \lambda \cdot f = 124{,}8\, m\, s^{-1}$$

**5.- a)** Una onda estacionaria es un fenómeno peculiar de superposición. Consideremos el caso de dos ondas iguales que se propagan en la misma dirección pero sentido contrario. (Es el caso de una onda que se encuentra con su onda reflejada)




Si la onda incidente es $y_1 = A\,sen(k\,x - \omega t)$ la reflejada será $y_2 = A\,sen(k\,x + \omega t)$, de la superposición de ambas se obtiene una onda del tipo $y = (2A\,sen\,k\,x) \cdot \cos \omega t$

**5.- a)** (continuación) es decir se obtiene una "onda" que no viaja, no es una onda de propagación, los puntos de la cuerda vibran con la misma frecuencia pero con distinta amplitud y hay unos puntos donde la amplitud es cero ($sen\,k\,x = 0$) que se llaman **nodos** y otros donde la amplitud es máxima que se llaman **vientres**. Por tanto las ondas estacionarias no encajan dentro de la definición general de ondas. La amplitud de la vibración en un punto cualquiera viene dada por la expresión $2A\,sen\,k\,x$, es decir es función de la posición y todos los puntos vibran con la frecuencia angular $\omega$ que es igual a las de las ondas armónicas que se superponen




La existencia de nodos o puntos que no oscilan implica que una onda estacionaria, a diferencia de las viajeras, no transporta energía de un punto a otro.

**b)** Se puede demostrar (ver páginas 228 y 229 del libro de texto) que la frecuencias de las ondas estacionarias que se producen en una cuerda de longitud l y densidad lineal μ, fija por ambos extremos y expuesta a una tensión T viene dada por la expresión

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

dándole valores a n (1, 2, 3,...) obtenemos los distintos armónicos. Para un determinado armónico, si disminuimos la longitud de la cuerda, aumenta la frecuencia de la vibración y el sonido que produce es más agudo.

**6.- a)** La ecuación es del tipo $x = A\,sen(\omega t + \varphi)$

conociendo el periodo (T = 2s) podemos calcular la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} = \pi\,s^{-1}$$

teniendo en cuenta que la aceleración máxima es $5\pi^2$ cm s$^{-2}$ y que su ecuación es $a_{max} = \omega^2 A$ (el signo menos lo quito porque solo indica que el sentido del vector aceleración es contrario a la elongación) podemos calcular la amplitud

$$A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2}{\pi^2} = 5\,cm$$

**6.- a)** (continuación) Para calcular la fase inicial sustituimos en la ecuación inicial los datos que nos da el problema (para t = 0, x = 2,5 cm)

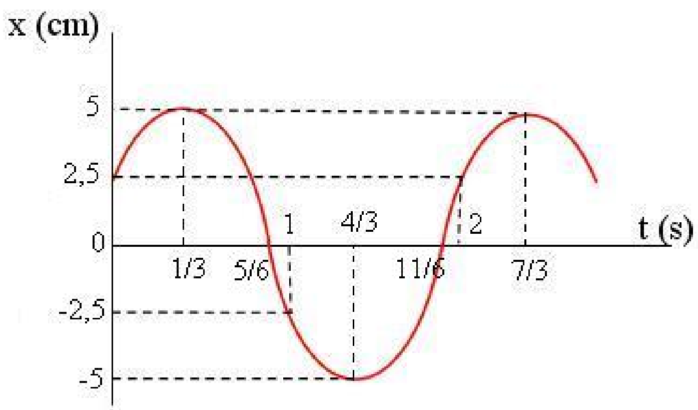
$$2,5 = 5\,sen\,\varphi \qquad \varphi = arcsen\ 0,5 = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}\,rad$$

La ecuación solicitada es

$$x = 5\,sen\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\,cm$$

**b)** Para representar la elongación (x) realizamos la siguiente tabla de valores

| t (s) | x (cm) |
|---|---|
| 0 | 2,5 |
| 1/3 | 5 |
| 5/6 | 0 |
| 1 | −2,5 |
| 4/3 | −5 |
| 11/6 | 0 |
| 2 | 2,5 |
| 7/3 | 5 |



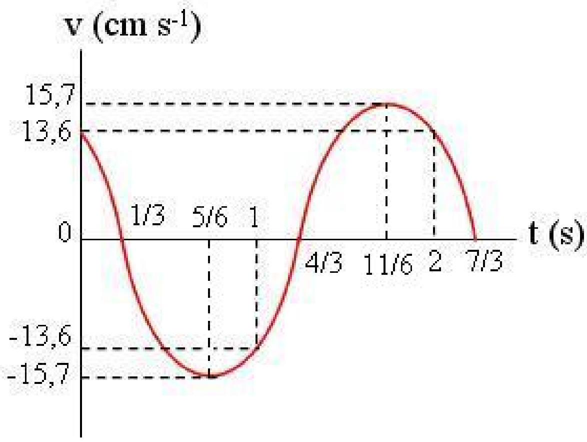

para representar gráficamente la velocidad en función del tiempo deducimos su ecuación

$$v = \frac{dx}{dt} = 5\pi\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\,cm\,s^{-1}$$

teniendo en cuenta que $v_{\max} = \omega A = 5\pi = 15,7\,cm\,s^{-1}$ realizamos la tabla de valores

**6.- b)** (continuación)

| t (s) | v (cm s$^{-1}$) |
|---|---|
| 0 | 13,6 |
| 1/3 | 0 |
| 5/6 | – 15,7 |
| 1 | – 13,6 |
| 4/3 | 0 |
| 11/6 | 15,7 |
| 2 | 13,6 |
| 7/3 | 0 |




como podemos observar la velocidad es máxima cuando la elongación es cero y la velocidad es cero cuando está en los extremos, es decir cuando la elongación es igual a la amplitud.