MAS Y MOV ONDULATORIO FCA 10 ANDALUCÍA

1. En una cuerda tensa se genera una onda viajera de 10 cm de amplitud mediante un oscilador de 20 Hz. La onda se propaga a 2 m s^{-1}.
a) Escriba la ecuación de la onda suponiendo que se propaga de derecha a izquierda y que en el instante inicial la elongación en el foco es nula.
b) Determine la velocidad de una partícula de la cuerda situada a 1 m del foco emisor en el instante 3 s.

2. a) Escriba la ecuación de una onda estacionaria en una cuerda con sus dos extremos fijos, y explique el significado físico de cada una de los parámetros que aparecen en ella.
b) Explique qué puntos de la cuerda del apartado anterior permanecen en reposo. ¿Qué puntos oscilan con amplitud máxima?

3. a) Explique qué es un movimiento armónico simple y cuáles son sus características dinámicas.
b) Razone cómo cambiarían la amplitud y la frecuencia de un movimiento armónico simple si: i) aumentara la energía mecánica, ii) disminuyera la masa oscilante.

4. La ecuación de una onda es:

$$y\ (x,t) = 10\ \mathrm{sen}(\pi/2 \cdot x)\ \mathrm{sen}(100\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y describa sus características.
b) Determine la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición daría lugar a dicha onda. ¿Qué distancia hay entre tres nodos consecutivos?

5. Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 ms^{-1} 7,2 ms^{-2} respectivamente.
a) Determine el período y la amplitud del movimiento.
b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima.

6. La ecuación de una onda armónica es:

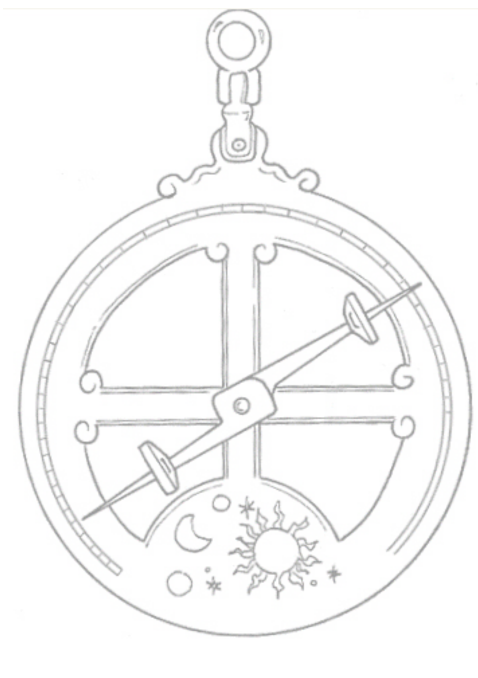
$$y(x,t) = A\ \mathrm{sen}\ (bt - cx)$$

a) Indique las características de dicha onda y lo que representa cada uno de los parámetros A, b y c.
b) ¿Cómo cambiarían las características de la onda si el signo negativo fuera positivo?

Fco. González Funes

7. Un bloque de 0,12 kg, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, oscila con una amplitud de 0,20 m.
a) Si la energía mecánica del bloque es de 6 J, determine razonadamente la constante elástica del resorte y el periodo de las oscilaciones.
b) Calcule los valores de la energía cinética y de la energía potencial cuando el bloque se encuentra a 0,10 m de la posición de equilibrio.

8. a) Explique qué son ondas longitudinales y transversales.
b) ¿Qué diferencias señalaría entre las características de las ondas luminosas y sonoras?



1.- a) A = 0,1 m f = 20 Hz v = 2 ms^{-1}

Escogemos la ecuación del seno sin fase inicial, ya que para x = 0 y t = 0, y = 0. El signo en el argumento es positivo porque se desplaza hacia la izquierda

$$y(x,t) = A\,sen(Kx + \omega t)$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 20\,s^{-1} = 40\pi\,s^{-1} \qquad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\,ms^{-1}}{20\,s^{-1}} = 0{,}1\,m$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}1\,m} = 20\pi\,m^{-1}$$

$$y(x,t) = 0{,}1\,\mathrm{sen}(20\pi x + 40\pi t) \qquad \mathrm{S.I.}$$

b) Calculamos la velocidad de vibración de la partícula solicitada

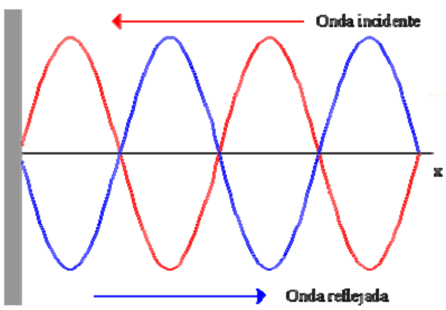
$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}1 \cdot 40\pi \cdot \cos(20\pi x + 40\pi t)$$

$$v = 4\pi \cdot \cos(20\pi x + 40\pi t)$$

para x = 1 m y t = 3 s obtenemos

$$v = 4\pi \cdot \cos(140\pi) = 4\pi = 12{,}56\,ms^{-1}$$

2.- a) Una onda estacionaria es un fenómeno peculiar de superposición de dos ondas iguales que se propagan en la misma dirección pero sentido contrario (es el caso de una onda que se encuentra con su onda reflejada)

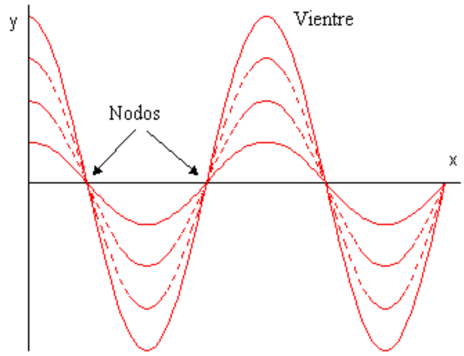


Su ecuación se obtiene por el principio de superposición y es la siguiente

$$y = \left(2A\,sen\,k\,x\right) \cdot \cos \omega t$$

donde A, k y ω son respectivamente la amplitud, el número de onda y la frecuencia angular de las ondas que por superposición generan la onda estacionaria. La amplitud de la vibración en un punto cualquiera viene dada por la expresión $A' = 2A\,sen\,k\,x$, es decir es función de la posición.

2.- b) Como hemos visto en el apartado anterior la amplitud de la vibración en un punto cualquiera viene dada por la expresión $A' = 2A\,sen\,k\,x$, es decir es función de la posición en consecuencia los puntos de la cuerda que no vibran son aquellos en los que se cumpla que A´= 0 y esto ocurre cuando sen kx = 0. Estos puntos reciben el nombre de nodos. Al contrario, cuando sen kx = 1 la amplitud será máxima, estos puntos reciben el nombre de vientres



3.- a) Un cuerpo tiene un movimiento armónico simple (MAS) cuando oscila periódicamente bajo la acción de fuerzas elásticas restauradoras, que obedecen a la ley de Hooke y que por lo tanto son proporcionales a la distancia a la posición de equilibrio, es el caso de los cuerpos unidos a muelles, etc.

En este movimiento, la posición del cuerpo es una función sinusoidal del tiempo (función seno o coseno dependiente del tiempo). Puesto que las funciones sinusoidales suelen denominarse armónicas, decimos que dicho cuerpo tiene un **movimiento armónico simple.**

En general la ecuación que representa a este movimiento puede escribirse así:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

en la que x representa la posición del móvil y se denomina elongación, A es la máxima o mínima elongación y se denomina Amplitud, ω es la frecuencia angular y δ es la fase inicial.

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, en este caso

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega\,A sen(\omega t + \delta)$$

como vemos también varía de forma armónica (sinusoidal) y es cero en los extremos de la trayectoria y máxima ($v_{max} = \pm\omega A$) en el centro.

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

3.- a) (continuación) también varía de forma armónica (sinusoidal) y es cero en el centro y máxima ($a_{max} = \pm\omega^2 A$) en los extremos.

Para considerar el MAS desde un punto de vista dinámico nos centramos en la fuerza elástica que cumple la ley de Hooke ($F = -k\,x$) y en la segunda ley de Newton ($F = m\,a$) con lo que nos queda $-k\,x = m\,a$ y como $a = -\omega^2 x$ sustituimos y obtenemos $\omega^2 = \frac{k}{m}$ es decir que la frecuencia angular y por lo tanto la frecuencia y el periodo de un oscilador armónico dependen de sus propias características físicas, la constante elástica del resorte y de la masa del cuerpo.

b) i) El ejercicio es confuso puesto que si se trata de un oscilador armónico formado por un muelle y una masa sujeta a uno de sus extremos, el único que se estudia en este curso, la amplitud es una elección del operador y si este la aumenta, estirando más el muelle, hace que aumente la energía mecánica del oscilador ya que

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

por lo tanto, si se nos quiere preguntar por la relación entre la amplitud y la energía mecánica, la pregunta debería hacerse al revés.
La frecuencia angular y por lo tanto la frecuencia y el periodo no varían puesto que no se ha cambiado ninguna de las dos características del oscilador (muelle y masa) y como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

ii) Si disminuimos la masa del oscilador, aumenta la frecuencia angular y por lo tanto aumenta la frecuencia. La amplitud no tiene ninguna relación con la masa.

4.- a) Si observamos la ecuación que nos da el ejercicio

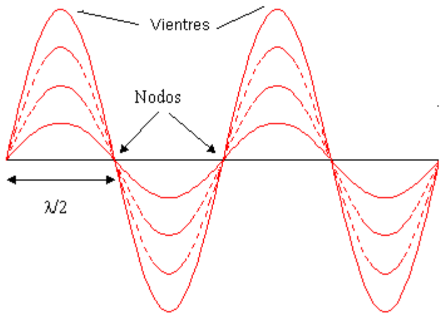
$$y(x,t) = 10sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)sen\left(100\pi t\right)$$

y la ecuación de las ondas estacionarias

$$y(x,t) = 2A \cdot sen\,k\,x \cdot sen\,\omega t$$

advertimos que se trata de una onda estacionaria, fenómeno que se produce por superposición entre ondas idénticas que se propagan en el mismo medio en sentidos opuestos, es decir se obtiene una "onda" que no viaja, no es una onda de propagación, los puntos de la cuerda vibran con la misma frecuencia pero con distinta amplitud y hay unos puntos donde la amplitud es cero ($sen\,k\,x = 0$) que se llaman **nodos** y otros donde la amplitud es máxima que se llaman **vientres**. Por tanto las ondas estacionarias no encajan dentro de la definición general de ondas.

4.- a) (continuación) La amplitud de la vibración en un punto cualquiera viene dada por la expresión $2A\,sen\,k\,x$, es decir es función de la posición y todos los puntos vibran con la frecuencia angular ω que es igual a las de las ondas armónicas que se superponen



b) Como hemos visto en el apartado anterior la amplitud de la onda estacionaria es función de la posición y viene dada por la expresión

$$A' = 2A\,sen\,k\,x \qquad A'_{max} = 2A \quad (sen\,k\,x = 1)$$

y como A'_{max} = 10 m, la amplitud de las ondas que se superponen es A = 5 m. Comparando la ecuación de nuestra onda con la ecuación general de la onda estacionaria obtenemos:

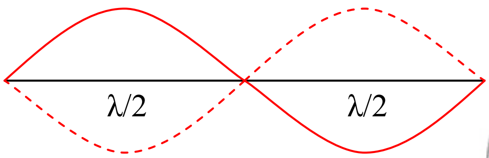
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \qquad \lambda = 4\,m$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \qquad f = 50\,s^{-1}$$

calculamos la velocidad de probación de las ondas que se superponen

$$v = \lambda f = 200\,ms^{-1}$$

La distancia entre dos nodos consecutivos es λ/2, por lo tanto, entre tres será de dos veces λ/2, es decir λ = 4 m como se ve en la siguiente figura



5.- a) Las expresiones para la velocidad máxima y la aceleración máxima son

$$v_{max} = A\omega \qquad a_{max} = A\omega^2$$

5.- a) (continuación) dividiendo la segunda ecuación por la primera obtenemos

$$\frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{A\omega^2}{A\omega} \qquad \omega = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{7,2\, ms^{-2}}{0,6\, ms^{-1}} = 12\, s^{-1}$$

calculamos la amplitud y el periodo

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{0,6\, ms^{-1}}{12\, s^{-1}} = 0,05\, m \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12\, s^{-1}} = \frac{\pi}{6} s$$

b) i) Para resolver este apartado hemos de preguntarnos ¿cómo duplicamos la frecuencia de un oscilador armónico formado por un muelle y una masa?

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

para duplicar la frecuencia tenemos dos opciones:

• cambiamos el resorte $k' = 4k$

• cambiamos el cuerpo $m' = \dfrac{m}{4}$

estudiamos los cambios producidos en la energía mecánica en ambos casos:

• Aumentamos $k' = 4k$

$$E_m = \frac{1}{2} kA^2 \qquad E_m' = \frac{1}{2} k' A^2 = \frac{1}{2} 4kA^2 = 4E_m$$

la energía mecánica se cuadruplica

• Disminuimos $m' = \dfrac{m}{4}$

$$E_m = \frac{1}{2} kA^2 = E_m'$$

la energía mecánica no cambia porque no depende de la masa. Esto último puede parecer extraño ya que al cambiar la masa debe cambiar la energía cinética, para comprobarlo calculamos la energía cinética máxima (en el punto de equilibrio) que es igual a la energía mecánica (energía potencial elástica cero)

$$\omega = 2\pi f \qquad \omega' = 2\pi f' = 2\pi 2 f = 2\omega$$

$$v_{\max} = \omega A \qquad v_{\max}' = \omega' A = 2\omega A = 2 v_{\max}$$

5.- b) i) (continuación)

$$E_m = E_{c\max} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_m{}' = E_{c\max}{}' = \frac{1}{2}m'(v')^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{4}4v^2 = E_{c\max} = E_m$$

Observamos que en este ejercicio se llega a resultados distintos según la opción que se elija para duplicar la frecuencia, es por lo tanto, un planteamiento confuso para el alumno.

b) ii) Otro tanto ocurre con este apartado. para duplicar la aceleración máxima hemos de cambiar la frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{a'_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{2a_{\max}}{A}} = \sqrt{2}\,\omega$$

¿cómo aumentamos en un factor $\sqrt{2}$ la frecuencia angular de un oscilador armónico formado por un muelle y una masa?

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

para aumentar en un factor $\sqrt{2}$ la frecuencia angular tenemos dos opciones:

• cambiamos el resorte $k' = 2k$

• cambiamos el cuerpo $m' = \frac{m}{2}$

estudiamos los cambios producidos en la energía mecánica en ambos casos:

• Aumentamos $k' = 2k$

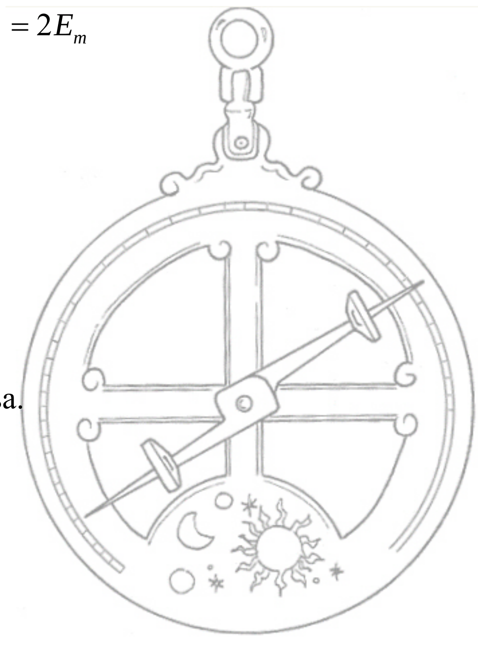
$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 \qquad E_m{}' = \frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}2kA^2 = 2E_m$$

la energía mecánica se duplica

• Disminuimos $m' = \frac{m}{2}$

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = E_m{}'$$

la energía mecánica no cambia porque no depende de la masa.



5.- b) ii) (continuación) Esto último puede parecer extraño ya que al cambiar la masa debe cambiar la energía cinética, para comprobarlo calculamos la energía cinética máxima (en el punto de equilibrio) que es igual a la energía mecánica (energía potencial elástica cero)

$$v_{\max} = \omega A \qquad v_{\max}' = \omega' A = \sqrt{2}\,\omega A = \sqrt{2}\,v_{\max}$$

$$E_m = E_{c\max} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad E_m' = E_{c\max}' = \frac{1}{2} m' (v')^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{2} 2 v^2 = E_{c\max} = E_m$$

otra vez llegamos a dos resultados distintos según la opción que se elija. Estos planteamientos deberían ser revisados.

6.- a) *y(x,t) = A sen (bt – cx)*

Si comparamos la ecuación del enunciado con la ecuación general de las ondas armónicas

$$y(x,t) = Asen(\omega t \pm k\,x)$$

nos damos cuenta de que el fenómeno se trata de una onda armónica transversal (la perturbación en el eje y, la propagación en el x) que se propaga en dirección del eje x en el sentido de las x positivas, es decir de izquierda a derecha, donde A es la amplitud, b es la frecuencia angular ω y c es el número de onda k.

b) Si el signo negativo fuera positivo la única característica que cambiaría sería el sentido de propagación de la onda que ahora sería hacia las x negativas, es decir de derecha a izquierda.

7.- a) Calculamos k a partir de la expresión de la energía mecánica

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \qquad k = \frac{2E_m}{A^2} = \frac{2 \cdot 6\,J}{0{,}04\,m^2} = 300\,Nm^{-1}$$

calculamos el periodo de oscilación

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{300\,Nm^{-1}}{0{,}12\,kg}}} = \frac{\pi}{25} s$$

b) La expresión de la energía cinética en función de la posición es

$$E_c = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} 300\,Nm^{-1} (0{,}2^2 - 0{,}1^2)\,m^2 = 4{,}5\,J$$

7.- b) (continuación) y la de la energía potencial es

$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} 300\, Nm^{-1} \cdot 0{,}1^2\, m^2 = 1{,}5\, J$$

8.- a) Uno de los criterios de clasificación de las ondas consiste en la coincidencia o no entre la dirección de oscilación de la propiedad perturbada (desplazamiento) y la de propagación de la onda. Se dice que la onda es longitudinal si ambas direcciones coinciden, las ondas sonoras son ejemplo de ondas longitudinales.

Se dice que la onda es transversal si ambas direcciones son perpendiculares, las ondas que se propagan en una cuerda son un ejemplo de ondas transversales, las más importantes son las ondas electromagnéticas.

b) Las ondas luminosas son ondas electromagnéticas y por lo tanto son transversales y las ondas sonoras son longitudinales.

Otra característica que las diferencia es que las ondas luminosas (electromagnéticas) no son mecánicas, es decir no necesitan un medio material para propagarse y las sonoras son mecánicas, es decir necesitan un medio material para su probación.