M.A.S. Y MOV. ONDULATORIO   FCA 12   ANDALUCÍA

1. Una onda transversal se propaga en el sentido negativo del eje X. Su longitud de onda es 3,75 m, su amplitud 2 m y su velocidad de propagación 3 m s^{-1}.
a) Escriba la ecuación de la onda suponiendo que en el punto x = 0 la perturbación es nula en t = 0.
b) Determine la velocidad y la aceleración máximas de un punto del medio.

2. Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación:

$$y\ (x, t) = 5 \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\cdot \text{sen}\ (40\ t)\ \ (\text{S. I.})$$

a) Indique qué tipo de onda es y cuáles son su amplitud y frecuencia. ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas que por superposición dan lugar a la anterior?
b) Calcule la distancia entre dos nodos consecutivos y la velocidad de un punto de la cuerda situado en x =1,5 m, en el instante t = 2 s.

3. Un radar emite una onda de radio de $6\cdot 10^{7}$ Hz.
a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última.
b) La onda emitida por el radar tarda $3\cdot 10^{-6}$ s en volver al detector después de reflejarse en un obstáculo. Calcule la distancia entre el obstáculo y el radar.
$c = 3\cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; v_{sonido} = 340 m s^{-1}

4. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique cómo varían con el tiempo la velocidad y la aceleración de la partícula.
b) Comente la siguiente afirmación: “si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, su movimiento es armónico simple”.

5. En una cuerda tensa de 16 m de longitud con sus extremos fijos se ha generado una onda de ecuación:

$$y\ (x, t) = 0{,}02\ \text{sen}\ (\pi x) \cdot \cos\ (8\pi t)\quad (\text{S. I.})$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y cómo podría producirse. Calcule su longitud de onda y su frecuencia.
b) Calcule la velocidad en función del tiempo de los puntos de la cuerda que se encuentran a 4 m y 4,5 m, respectivamente, de uno de los extremos y comente los resultados.

6. La ecuación de una onda en la superficie de un lago es:

$$y\ (x, t) = 5\cdot 10^{-2} \cos\ (0{,}5\ t - 0{,}1\ x)\quad (\text{S. I.})$$

a) Explique qué tipo de onda es y cuáles son sus características y determine su velocidad de propagación.
b) Analice qué tipo de movimiento realizan las moléculas de agua de la superficie del lago y determine su velocidad máxima.

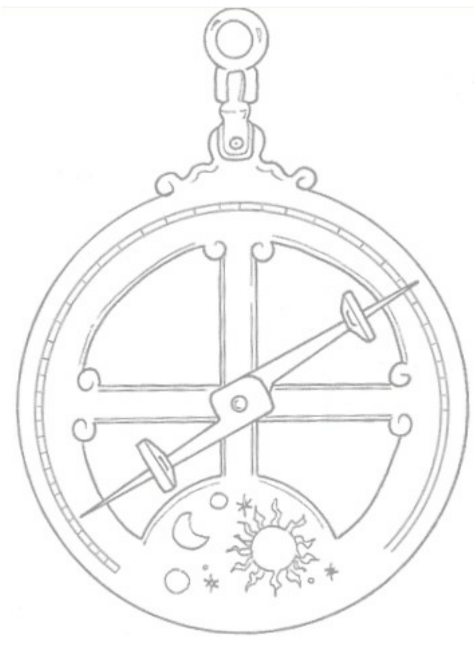
Fco. González Funes

7. a) Energía mecánica de un oscilador armónico simple. Utilice una representación gráfica para explicar la variación de las energías cinética, potencial y mecánica en función de la posición.
b) Dos partículas de masas m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$), unidas a resortes de la misma constante k, describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos pasa por esa posición a mayor velocidad? Razone las respuestas.

8. Una onda en una cuerda viene descrita por:

$$y(x, t) = 0{,}5 \cos x \cdot \text{sen}(30\,t) \text{ (S. I.)}$$

a) Explique qué tipo de movimiento describen los puntos de la cuerda y calcule la máxima velocidad del punto situado en x = 3,5 m.
b) Determine la velocidad de propagación y la amplitud de las ondas cuya superposición darían origen a la onda indicada.



Fco. González Funes

M.A.S. Y MOV. ONDULATORIO   FCA 12   ANDALUCÍA

1.- a) A = 2 m   λ = 3,75 m   v = 3 ms^{-1}

Escogemos la ecuación del seno sin fase inicial, ya que para x = 0 y t = 0, y = 0. El signo en el argumento es positivo porque se desplaza hacia la izquierda

$$y(x,t) = A\,sen(Kx + \omega t)$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3{,}75\,m} = \frac{8}{15}\pi\, m^{-1} \qquad \omega = 2\pi f = 2\pi\frac{v}{\lambda} = \frac{8}{5}\pi\, s^{-1}$$

$$y(x,t) = 2\,\text{sen}\left(\frac{8}{15}\pi x - \frac{8}{5}\pi t\right) \quad \text{S.I.}$$

b) Calculamos la velocidad y la aceleración de vibración de la partícula solicitada

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\cdot\frac{8}{5}\pi\cdot\cos\left(\frac{8}{15}\pi x + \frac{8}{5}\pi t\right) = \frac{16}{5}\pi\cdot\cos\left(\frac{8}{15}\pi x + \frac{8}{5}\pi t\right)\, ms^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{16}{5}\pi\cdot\frac{8}{5}\pi\cdot sen\left(\frac{8}{15}\pi x + \frac{8}{5}\pi t\right) = -\frac{128}{25}\pi^2\cdot sen\left(\frac{8}{15}\pi x + \frac{8}{5}\pi t\right)\, ms^{-2}$$

La velocidad y aceleración máximas se producen cuando los valores del seno o del coseno son la unidad, en consecuencia:

$$v_{\max} = \frac{16}{5}\pi\, ms^{-1} \qquad a_{\max} = \frac{128}{5}\pi^2\, ms^{-2}$$

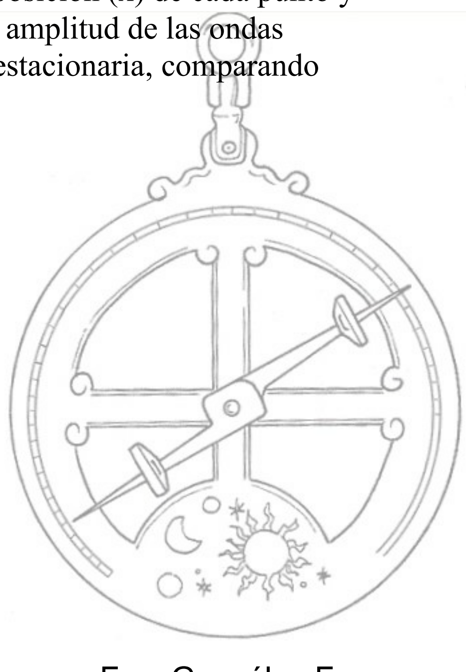
2.- a)   y (x, t) = 5 cos ($\frac{1}{3}$ π x)·sen (40 t) (S. I.)

Es una onda estacionaria porque su ecuación es del tipo $y(x,t) = (2A\cos Kx)sen\,\omega t$.
La amplitud, A' , de una onda estacionaria depende de la posición (x) de cada punto y viene dada por la expresión $A' = 2A\cos Kx$, donde A es la amplitud de las ondas armónicas que por superposición forman la onda la onda estacionaria, comparando ambas ecuaciones obtenemos:

$$A' = 5\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) m$$

Como ω = 40 rad s^{-1}, la frecuencia será

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = \frac{20}{\pi} s^{-1}$$



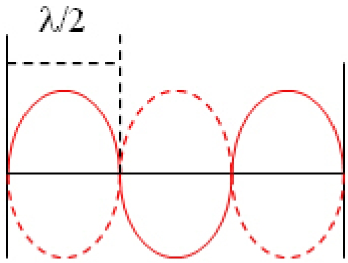
2.- a) (continuación) Calculamos la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{1/3\,\pi} = 6\,m$$

Calculamos la velocidad de propagación de las ondas armónicas que por superposición forman la onda la onda estacionaria

$$v = \lambda f = 6 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{120}{\pi} ms^{-1}$$

b) Si representamos una cuerda atada por los dos extremos, en la que se forma una onda estacionaria



vemos que la distancia existente entre dos nodos es

$$x = \frac{\lambda}{2} = \frac{6\,m}{2} = 3\,m$$

Para calcular la velocidad de vibración de un punto de la cuerda, derivamos con respecto al tiempo la ecuación de posición y sustituimos x =1,5 m y t = 2 s

$$v = \frac{dy}{dt} = 5\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \cdot 40 \cdot \cos(40t) = 0$$

3.- a) La onda emitida por el radar es una onda electromagnética, no necesita medio material para su propagación ya que la propiedad perturbada es un campo magnético y uno eléctrico y es además una onda transversal que se propaga en el aire a la velocidad de la luz c.

La onda sonora es una onda material que necesita un medio material para su propagación porque la propiedad perturbada es la presión y es una onda longitudinal que se propaga en el aire a 340 ms^{1}.

Calculamos la longitud de la onda electromagnética en el aire

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{\cdot}10^{8}\ ms^{-1}}{6{\cdot}10^{7}\ s^{-1}} = 5\,m$$

3.- a) (continuación) Calculamos la frecuencia de una onda sonora de la misma longitud de onda

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\,ms^{-1}}{5\,m} = 68\,s^{-1}$$

b) Las ondas electromagnéticas se mueven con velocidad constante c, el tiempo que tardan en llegar al objeto es la mitad del total, $1{,}5\cdot 10^{-6}$ s, por lo tanto, la distancia recorrida es

$$d = c\cdot t = 3\cdot 10^{8}\,ms^{-1}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-6}\,s = 450\,m$$

4.- a) La ecuación de un movimiento armónico simple es del tipo

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

La velocidad se obtiene derivando la posición con respecto al tiempo

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos\left(\omega t + \delta\right)$$

la aceleración, derivando la velocidad

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A sen\left(\omega t + \delta\right)$$

puesto que $x = A sen\left(\omega t + \delta\right)$ $a = -\omega^2 x$

A lo largo de una oscilación la velocidad es máxima ($v_{\max} = \omega A$) en el centro y cero en los extremos donde cambia de sentido. La aceleración ($a = -\omega^2 x$) es cero en el centro y máxima en los extremos ($a_{\max} = \omega^2 A$)

b) La afirmación es verdadera, si $a = -cte\cdot x$ y $F = m\cdot a$ sustituyendo, $F = -m\cdot cte\cdot x$ como el producto de la masa por la constante es también constante (le llamamos K), nos quedaría la siguiente ecuación:

$$F = -K\cdot x$$

que es la expresión de una fuerza elástica recuperadora que implica un movimiento armónico simple.

5.- a) Si observamos la ecuación que nos da el ejercicio

$$y(x,t) = 0,02sen\left(\pi x\right)\cos\left(8\pi t\right)$$

y la ecuación de las ondas estacionarias

$$y(x,t) = 2A \cdot sen\, k\, x \cdot \cos \omega t$$

advertimos que se trata de una onda estacionaria, fenómeno que se produce por superposición entre ondas idénticas que se propagan en el mismo medio en sentidos opuestos.

Comparando ambas ecuaciones obtenemos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \qquad \lambda = 2\,m$$

$$\omega = 2\pi f = 8\pi \qquad f = 4\,s^{-1}$$

b) La velocidad de vibración de los puntos de la cuerda viene dada por la expresión:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0,16\pi sen\left(\pi x\right)sen\left(8\pi t\right)$$

Para $x = 4\,m$, como $sen\,4\pi = 0$, $v = 0$ por lo tanto se trata de un nodo, punto que no oscila en ningún instante. Para $x = 4,5\,m$, como $sen\,4,5\pi = 1$,

$$v = -0,16\pi sen(8\pi t)\,ms^{-1}$$

Podemos comprobar que este punto se trata de un vientre (máxima amplitud de oscilación).

6.- $y\ (x,\ t) = 5\cdot10^{-2}\cos\ (0,5\ t - 0,1\ x)$ (S. I.)

a) Se trata de una onda armónica transversal de ecuación

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$

para calcular la velocidad de propagación, comparamos ambas ecuaciones y obtenemos

$$\omega = 0,5\,rad\,s^{-1} \qquad k = 0,1\,m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{0,5\,rad\,s^{-1}}{0,1\,m^{-1}} = 5\,ms^{-1}$$

6.- b) Calculamos la velocidad de vibración de las moléculas de la superficie derivando la ecuación de posición con respecto al tiempo

$$v = \frac{dy}{dt} = -5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot sen(0,5t - 0,1x) = -2,5 \cdot 10^{-2} \cdot sen(0,5t - 0,1x)$$

La velocidad máxima se cumple cuando el seno toma el valor de uno, por lo tanto

$$v_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-2}\ ms^{-1}$$

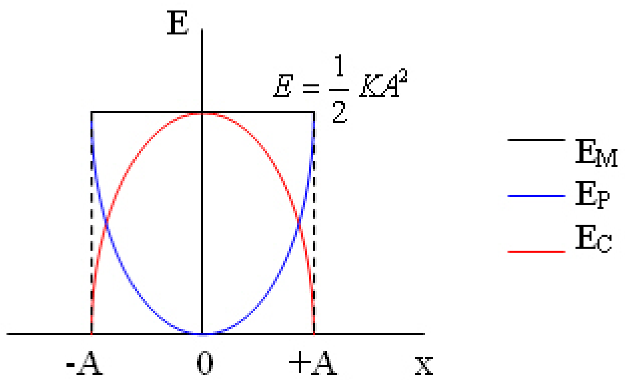
7.- a) Teniendo en cuenta que la fuerza elástica recuperadora es conservativa, se puede definir una energía potencial elástica asociada a dicha fuerza que viene dada por la expresión

$$E_p = \frac{1}{2} Kx^2$$

Donde K es la constante elástica del oscilador y x es la posición con respecto al punto de equilibrio llamada elongación.
La energía mecánica de un oscilador armónico (suma de la cinética y la potencial), permanece constante si no actúan fuerzas disipativas, se puede demostrar que su valor es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud

$$E_m = \frac{1}{2} KA^2$$

Representamos gráficamente las tres energías en función de la posición



La energía cinética y la potencial varían de forma conjunta, mientras que la mecánica permanece constante.
La energía cinética es nula en los extremos de la trayectoria y máxima en el punto de equilibrio.
La energía potencial es máxima en los extremos de la trayectoria y nula en el punto de equilibrio.

7.- b) En la posición de equilibrio (x = 0) la energía potencial es cero y la energía cinética es máxima e igual a la energía mecánica

$$E_c = E_m = \frac{1}{2}KA^2$$

Observamos que no depende de la masa y como ambos osciladores tienen la misma constante elástica y la misma amplitud, la energía cinética será igual en los dos.
La expresión general de la energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Al tener la misma energía cinética, tendrá mayor velocidad el que tenga menor masa, es decir, m_1.

8.- a) Los puntos de la cuerda describen un movimiento oscilatorio en dirección perpendicular a la de propagación, es decir, en el eje y. Al tratarse de una onda estacionaria, habrá puntos cuya amplitud de oscilación sea máxima (vientres) y puntos cuya amplitud de oscilación sea cero, es decir, que no se mueven (nodos).
La velocidad de oscilación de los puntos de la cuerda es la derivada de y con respecto al tiempo

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,5 \cdot \cos x \cdot 30 \cdot \cos(30t)\ ms^{-1} = 15 \cdot \cos x \cdot \cos(30t)\, ms^{-1}$$

la velocidad máxima del punto x = 3,5 m será cuando $\cos(30t) = 1$ (valor máximo)

$$v_{\max} = 15 \cdot \cos(3,5) = 14\, ms^{-1}$$

b) La amplitud de la onda estacionaria es función de la posición y viene dada por la expresión

$$A' = 2A\cos k\,x \qquad A'_{\max} = 2A \quad (\cos k\,x = 1)$$

y como $A'_{max} = 0,5$ m, la amplitud de las ondas que se superponen es A = 0,25 m.
Comparando la ecuación de nuestra onda con la ecuación general de la onda estacionaria obtenemos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1 \qquad \lambda = 2\pi\, m \qquad \omega = 2\pi f = 30\, s^{-1} \qquad f = \frac{30}{2\pi} = \frac{15}{\pi} s^{-1}$$

calculamos la velocidad de propagación de las ondas que se superponen

$$v = \lambda f = 30\, ms^{-1}$$