

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si no es extremo relativo, será un punto de inflexión, luego: $f''(1) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -3 ; b = 3 ; c = 0$$

Luego la función es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es derivable.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable, también es continua. Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - kx^2) = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{kx} \right) = \frac{2}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 2 ; k = 1$$

$$\text{Calculamos la derivada: } f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{kx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

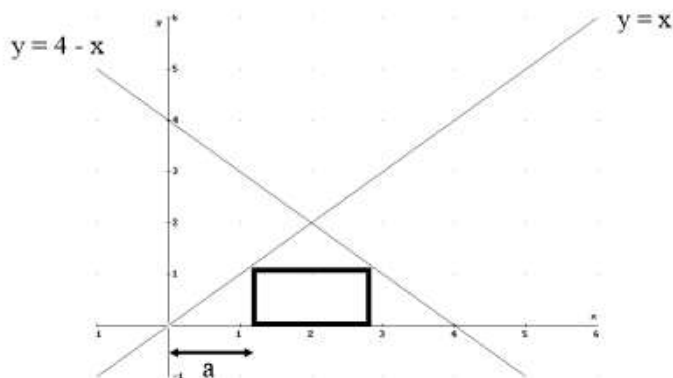
Y como es derivable, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -2k \\ f'(1^+) = -\frac{2}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -2k = -\frac{2}{k} \Rightarrow k = \pm 1$$

Luego, el único valor posible es $k=1$:

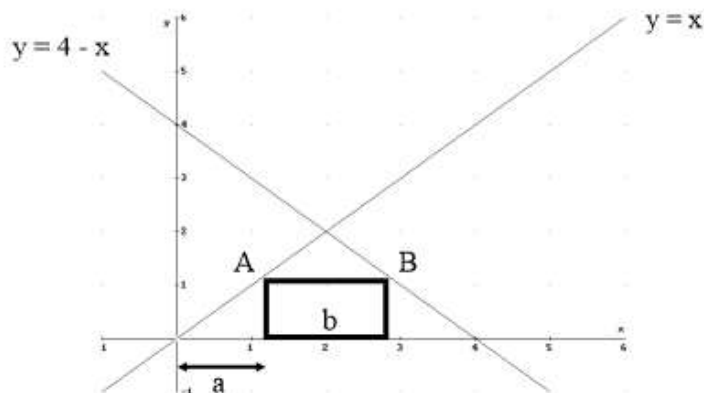
Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:

- Halla la altura del rectángulo en función de a (ver figura).
- Halla la base del rectángulo en función de a .
- Encuentra el valor de a que hace máximo el área del rectángulo.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) El vértice A tiene de coordenadas (a, a) , ya que es un punto de la recta $y = x$. Por lo tanto, la altura del rectángulo es a .

b) El vértice B tiene de coordenadas $(b + a, a)$, y como es un punto de la recta $y = 4 - x$, se cumple que: $a = 4 - (b + a) \Rightarrow b = 4 - 2a$.

c) La función que queremos que sea máximo es: $S_{\max} = (4 - 2a) \cdot a = 4a - 2a^2$

Derivamos e igualamos a cero: $S'_{\max} = 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1$

Luego, el área es máxima cuando $a = 1$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ xe^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$ y en $x=1$.

b) Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Primero estudiamos la continuidad de la función.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} -xe^{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{x-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} xe^{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} xe^{1-x} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1}(-1-x) & \text{si } x < 0 \\ e^{x-1}(1+x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{1-x}(1-x) & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \\ f'(0^+) = e^{-1} \cdot (1) = \frac{1}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = e^0 \cdot 2 = 2 \\ f'(1^+) = e^0 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b) Calculamos las asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{x-1} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal}$$

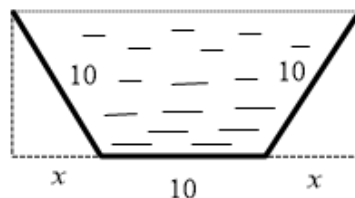
en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es una asíntota horizontal en}$$

$+\infty$

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:

- Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).
- Halla el área de la sección de la canaleta en función de x .
- Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Aplicando Pitágoras, vemos que $h = \sqrt{100 - x^2}$

b) Área de la canaleta = Área del rectángulo - 2 Área del triángulo

$$S = (10 + 2x) \cdot \sqrt{100 - x^2} - 2 \cdot \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{100 - x^2} = (10 + x) \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \sqrt{100 - x^2} + (10 + x) \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - 10x - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2 - 10x + 100 = 0 \Rightarrow x = 5 ; x = -10$$

Luego, el máximo es para $x = 5$ cm

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm \infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \infty \Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 2$

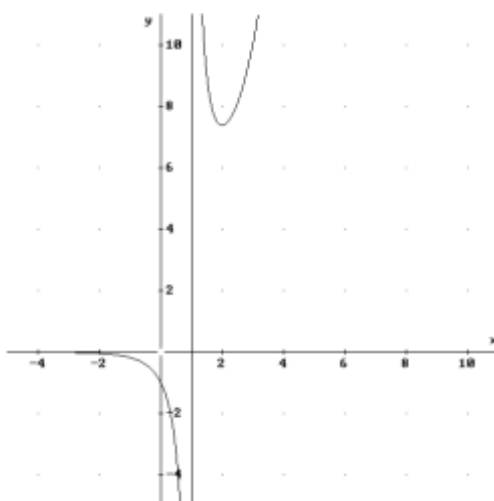
	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo y'	—	—	+
Función	D	D	C

\downarrow \downarrow
 No existe mínimo $(2, e^2)$

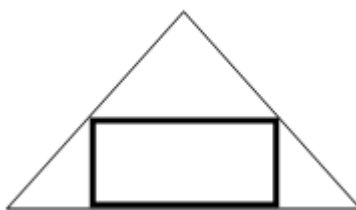
Creciente: $(2, +\infty)$. Decreciente: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$. Mínimo en $(2, e^2)$

c) Corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow$ No corta

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{e^0}{-1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$

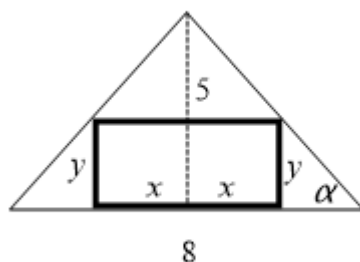


Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{\max} = 2xy$

b) Relación entre las variables: $\frac{5-y}{x} = \frac{5}{4} \Rightarrow 20-4y = 5x \Rightarrow y = \frac{20-5x}{4}$

$$S_{\max} = 2xy = 2x \cdot \frac{20-5x}{4} = \frac{40x-10x^2}{4} = \frac{20x-5x^2}{2}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{20-10x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$$

d) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$S''_{\max} = \frac{-10}{2} < 0 \Rightarrow \text{corresponde a un máximo independientemente del valor de } x$$

Luego, las dimensiones del rectángulo son base = $2x = 4m$; altura = $y = \frac{5}{2}m$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función definida por $f(x) = x + x e^{-x}$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x - y + 1 = 0$.

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$ tiene de pendiente 1. La recta tangente como es paralela también tiene de pendiente 1, luego:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 + e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 1 + (1 - x) \cdot e^{-x} = 1 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Y como: $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$

Luego, la recta tangente en $x = 1$ es $y - 1 - \frac{1}{e} = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x - 1 + 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow y = x + \frac{1}{e}$

b) La función $f(x) = x + x e^{-x} = x + \frac{x}{e^x} = \frac{x \cdot (e^x + 1)}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (e^x + 1)}{e^x} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot (e^x + 1) + x \cdot e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot (1 + x) + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot (1 + x) + e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x) + 1 = +\infty \Rightarrow \text{No tiene} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = x + x e^{-x} = -\infty \Rightarrow \text{No tiene}$$

Calculamos la asíntota oblicua $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x \cdot (e^x + 1)}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot (e^x + 1)}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot e^x + x - x \cdot e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Luego, la asíntota oblicua es: $y = x$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

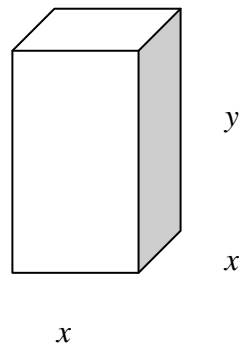
R E S O L U C I Ó N

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x}{-2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x + 3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-2 + 3 \cos x} = \frac{2}{-2 + 3} = 2 \end{aligned}$$

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m² para los laterales y de 24 euros/m² para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $V_{\max} = x^2 \cdot y$

b) Relación entre las variables: $50 = 24 \cdot x^2 + 18 \cdot 4xy = 24x^2 + 72xy \Rightarrow y = \frac{50 - 24x^2}{72x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{\max} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \frac{50 - 24x^2}{72x} = \frac{50x - 24x^3}{72}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V'_{\max} = \frac{50 - 72x^2}{72} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{50}{72}} = \pm \frac{5}{6}$$

e) Comprobamos que es máximo

$$V'' = \frac{-144x}{72} \Rightarrow V''\left(x = \frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = \frac{5}{6} \text{ m}$; $y = \frac{5}{9} \text{ m}$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza su máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Continua en $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 + bx + c &= c \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen } x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 2$$

Máximo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$

La recta tangente a f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2 $\Rightarrow f'(-2) = 2 \Rightarrow -4a + b = 2$.

Resolviendo el sistema $\left. \begin{aligned} -2a + b &= 0 \\ -4a + b &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1 ; b = -2$

Luego, $a = -1 ; b = -2 ; c = 2$

Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

- Extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0$

- Extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale que: $a = -\frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{6}$

b) Calculamos la segunda derivada: $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 2b = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$

$$f''(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo}$$

$$f''(2) = \frac{2}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo}$$