

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral: $f(x) = \int \frac{(x-1)^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} dx$

Como es una función racional, dividimos los dos polinomios y descomponemos la integral

$$f(x) = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} dx = \int (x-3) dx + \int \frac{4}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1| + C$$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + 0 + 0 + C \Rightarrow C = 0$

Luego, la función es: $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1|$

La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 4 \ln 2 = -\frac{5}{2} + 4 \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \Rightarrow f'(1) = 0$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + \frac{5}{2} - 4 \ln 2 = 0 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{5}{2} + 4 \ln 2$

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln x$ (ln representa logaritmo neperiano).

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f , $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

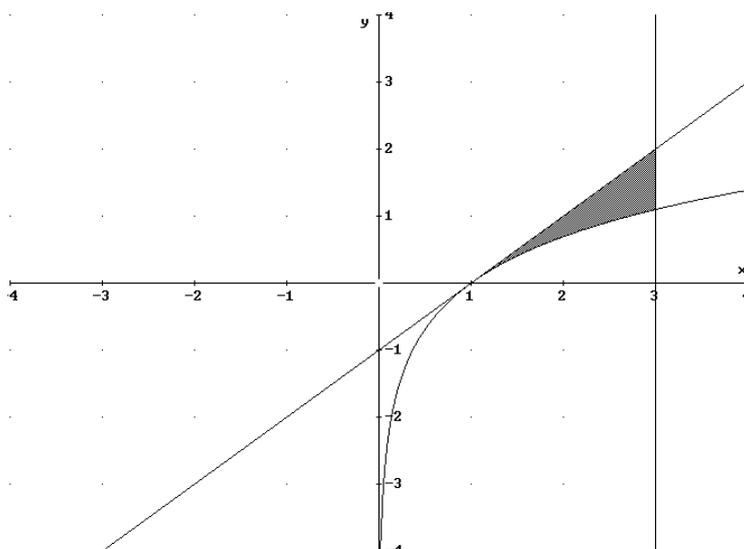
a) La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_1^3 (x - 1 - \ln x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x - x \ln x + x \right]_1^3 = \left[\frac{x^2}{2} - x \ln x \right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - 3 \ln 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 \right) = 4 - 3 \ln 3 \text{ u}^2$$

La integral de $\ln x$ la hacemos por partes

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

Considera la función f dada por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{\ln x}{x}$ para $x > 0$.

a) Halla todas las primitivas de f .

b) Halla $\int_1^3 f(x) dx$

c) Determina la primitiva de f que toma el valor 3 para $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la integral de \sqrt{x} y la integral de $\frac{\ln x}{x}$ por separado.

$$I_1 = \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3}$$

$$I_2 = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Hacemos un cambio de variable: $t = \ln x$; $dt = \frac{1}{x} dx$

$$I_2 = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

Con lo cual, todas las primitivas de f son: $F(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

b)

$$\int_1^3 f(x) dx = \left[\frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^3 = \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{3} + \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{(\ln 1)^2}{2} \right) = 2 \cdot \sqrt{3} + \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{2}{3}$$

c) Calculamos la primitiva que cumple: $F(1) = 3$

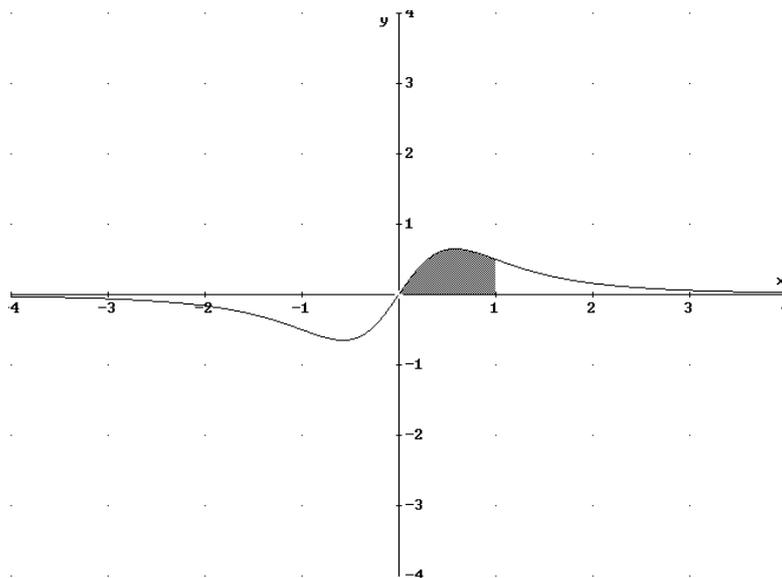
$$F(1) = 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{1^3}}{3} + \frac{(\ln 1)^2}{2} + C = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{3}$$

Con lo cual, la primitiva que nos piden es: $F(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{7}{3}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo del recinto cuya área nos piden calcular



El área que nos piden viene dada por: $A = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$

Hacemos un cambio de variable: $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow t = x^2 + 1 = 1$$

$$\text{Si } x=1 \Rightarrow t = x^2 + 1 = 2$$

Con lo cual:

$$A = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} u^2$$

De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x = 0$ y que $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada de la función.

$$f'(x) = ae^x - b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Tangente horizontal en $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow a - b = 0$

$$- \int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^1 (ae^x - bx) dx = \left[ae^x - \frac{bx^2}{2} \right]_0^1 = ae - \frac{b}{2} - a = e - \frac{3}{2}$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a = 1$; $b = 1$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m > 0$. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje OX

$$\frac{3x(2m-x)}{m^3} = 0 \Rightarrow 6mx - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2m$$

Vemos que función va por encima y cuál por debajo:

$$x = m \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3m(2m-m)}{m^3} = \frac{3}{m} > 0 \\ \text{Eje OX} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Luego, la función $f(x) = \frac{3x(2m-x)}{m^3}$ va por encima del eje OX

$$A = \frac{1}{m^3} \int_0^{2m} (6mx - 3x^2) dx = \frac{1}{m^3} \left[\frac{6mx^2}{2} - \frac{3x^3}{3} \right]_0^{2m} = \frac{1}{m^3} (12m^3 - 8m^3) = 4 u^2$$

Calcula el valor de $a > 0$ para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2} dx = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral

$$\int_0^a \frac{x}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x}{2+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(2+x^2)]_0^a = \frac{1}{2} [\ln(2+a^2) - \ln 2] = 1$$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{1}{2} [\ln(2+a^2) - \ln 2] = 1 \Rightarrow \ln \frac{2+a^2}{2} = 2 \Rightarrow e^2 = \frac{2+a^2}{2} \Rightarrow a = +\sqrt{2e^2 - 2} = 3'57$$

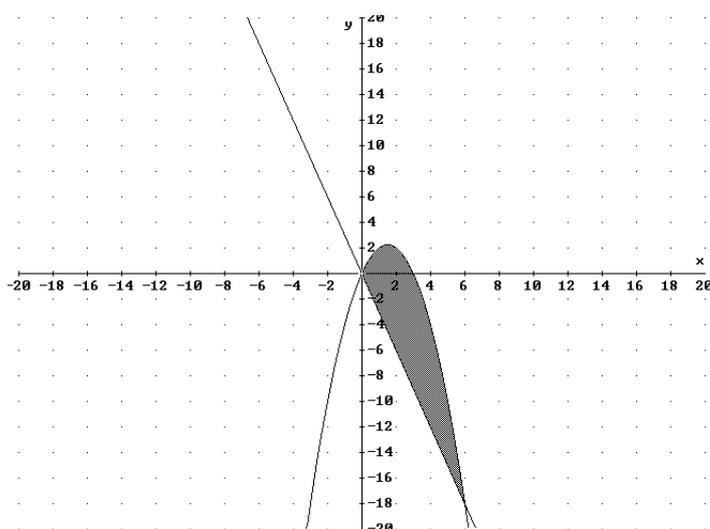
Ya que $a > 0$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2 + mx$ siendo $m > 0$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -mx$ y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -mx \\ y = -x^2 + mx \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2mx = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2m .$$

$$\begin{aligned} 36 &= \int_0^{2m} (-x^2 + mx - (-mx)) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2mx^2}{2} \right]_0^{2m} = \left[-\frac{(2m)^3}{3} + \frac{2m(2m)^2}{2} \right] = -\frac{8m^3}{3} + \frac{8m^3}{2} = \\ &= \frac{8m^3}{6} \Rightarrow m^3 = 27 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

Calcula $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}} dx$ (sugerencia : $t = \sqrt{2x+1}$)

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t = \sqrt{2x+1}$, vamos a calcular cuánto vale dx y x :

$$dt = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow dx = \sqrt{2x+1} dt = t dt$$

$$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2}$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{t^2 dt}{2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+1+t} = \int \frac{t^2 dt}{t^2+t} = \int \frac{tdt}{t+1}$$

Dividimos y descomponemos:

$$\int \frac{tdt}{t+1} = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \ln|t+1| = \sqrt{2x+1} - \ln|\sqrt{2x+1}+1| + C$$

Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = -2 \operatorname{sen} 2x, \quad f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos:

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int -2 \operatorname{sen} 2x dx = -\int 2 \operatorname{sen} 2x dx = -(-\cos 2x) = \cos 2x + C$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\cos 2x + C) dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + Cx + D$$

Calculamos los valores de las constantes con los datos del problema

$$f(0) = 1 \Rightarrow D = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{\pi}$$

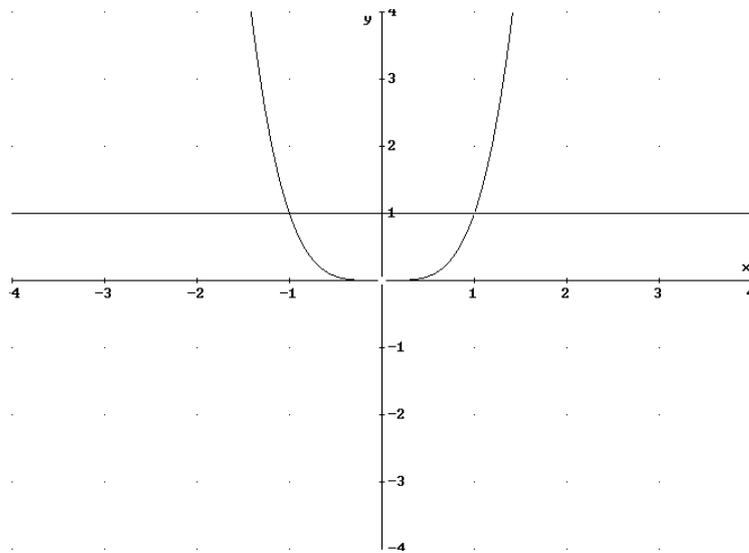
Luego, la función que nos piden es: $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{\pi} x + 1$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones. La recta paralela al eje OX tiene de ecuación $y = a$



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = a \\ y = x^4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^4 = a \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a}.$$

Como el recinto es simétrico respecto al eje OY, calculamos el área para $x > 0$ y la multiplicamos por 2

$$\begin{aligned} \frac{8}{5} &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt[4]{a}} (a - x^4) dx = 2 \left[ax - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[4]{a}} = 2 \cdot \left[a\sqrt[4]{a} - \frac{(\sqrt[4]{a})^5}{5} - 0 \right] = 2 \cdot \left[a\sqrt[4]{a} - \frac{a\sqrt[4]{a}}{5} \right] = \frac{8a\sqrt[4]{a}}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{8}{5} &= \frac{8a\sqrt[4]{a}}{5} \Rightarrow 1 = a\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^5} \Rightarrow a^5 = 1 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Calcula $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = t &\Rightarrow x = t^2 \\ dx &= 2t dt\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t^3}{1+t} dt$$

Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I = \int \frac{2t^3}{1+t} dt = \int \left(2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2 \ln|1+t| = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C$$